

## FONKSİYONLARDA LİMİT - TÜREV

Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik .....	3
Özellikler .....	7
Parçalı Fonksiyonların Limitleri .....	9
Mutlak Değer Fonksiyonunun Limiti .....	11
$\frac{0}{0}$ Belirsizliği .....	13
Süreklilik .....	15
Limit Testler .....	19
Değişim Oranı .....	33
Türev Alma Kuralları .....	35
Bileşke Fonksiyonun Türevi .....	36
Ters Fonksiyonun Türevi .....	39
Yüksek Mertebeden Türev .....	40
Türevin Fiziksel Yorumu .....	40
Türevin Varlığı .....	41
Mutlak Değer Fonksiyonunun Türevi .....	44
L'Hospital Kuralı .....	45
Türevin Polinomlara Uygulanması .....	45
Türevin Geometrik Yorumu .....	46
Azalan ve Artan Fonksiyonlar .....	49
Fonksiyonlarda Yerel Maksimum ve Yerel Minimum Noktaları .....	51
Bir Fonksiyonun Bir Aralıktaki En Büyük ve En Küçük Değeri .....	55
Max - Min Problemleri .....	56
Rolle Teoremi .....	60
Ortalama Değer Teoremi .....	60
Türev Testler .....	61
Cevap Anahtarı .....	85



## FONKSİYONLARDA LİMİT VE SÜREKLİLİK

$a \in \mathbb{R}$  olmak üzere,  $y = f(x)$  fonksiyonunda  $x$  değişkeni  $a$  sayısına yaklaşırken,  $y$  değerleri tek bir gerçek  $c$  sayısına yaklaşıyorsa, o sayıya  $f$  fonksiyonunun  $x = a$  noktasındaki limiti denir.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$  ile gösterilir.

$x$  değişkeni  $a$  sayısına,  $a$  dan küçük değerlerle yaklaşıyorsa  $f$  fonksiyonunun  $y$  ekseninde yaklaştığı değere  $f$  fonksiyonunun  $x = a$  noktasındaki sol limiti denir ve  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  ile gösterilir.

$x$  değişkeni  $a$  sayısına,  $a$  dan büyük değerlerle yaklaşıyorsa  $f$  fonksiyonunun  $y$  ekseninde yaklaştığı değere  $f$  fonksiyonunun  $x = a$  noktasındaki sağ limiti denir ve  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  ile gösterilir.

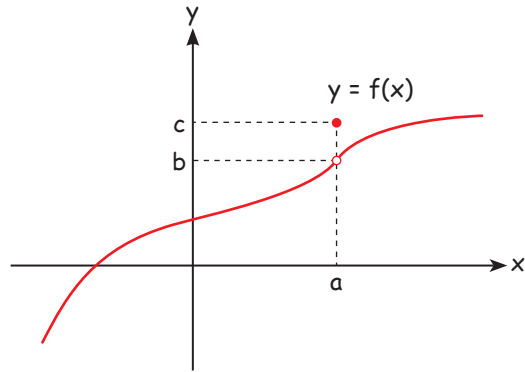
Bir fonksiyonun herhangi bir noktada limitinin olabilmesi için sağ ve sol limitlerinin eşit olması gerekir.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = c \text{ ise } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \text{ dir.}$$

### Unutma!

Bir fonksiyonun herhangi bir noktada limitinin olması için o noktada tanımlı olması gerekmez.

### Örnek Soru



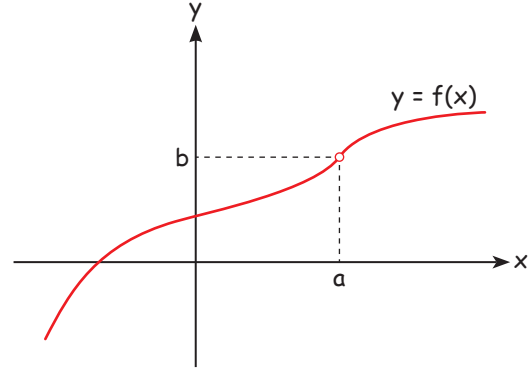
Yukarıdaki grafikte verilen  $f(x)$  fonksiyonunun  $x = a$  noktasında limiti olup olmadığını bulunuz.

### Biz Çözdük

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b \text{ ve } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b \text{ olduğundan}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ dir.}$$

### Örnek Soru



Yukarıdaki grafikte verilen  $f(x)$  fonksiyonunun  $x = a$  noktasında limiti olup olmadığını bulunuz.

### Biz Çözdük

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b \text{ ve } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b \text{ olduğundan}$$

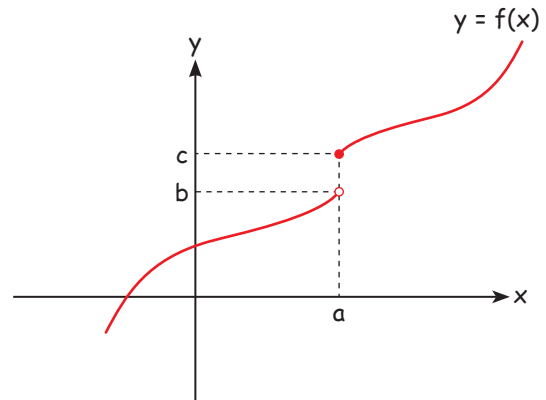
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ dir.}$$

### Unutma!

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  ise  $f$  fonksiyonunun  $x = a$  noktasında limiti yoktur.

### Unutma!

Bir fonksiyonun bir noktada limitinin olmaması için sağ limiti, sol limitinden farklı olmalıdır.



$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$  ve  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = c$  olduğundan  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  yoktur.

**Dikkate Al**

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$  ifadesinde  $c$  varsa tektir.

$c \rightarrow \infty$  ise limit yoktur.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  şeklinde yazılır.

**Dikkate Al**

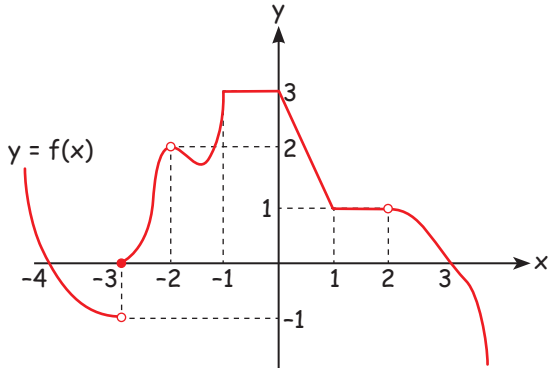
Bir fonksiyonun denkleminin değiştiği noktaya **kritik nokta** denir. Kritik nokta aynı zamanda tanımsız olduğu nokta olarak da adlandırılabilir.

Bir  $f(x)$  fonksiyonunun  $x = a$  noktasındaki limitini bulmak için

i)  $x = a$  noktası kritik nokta ise sağ ve sol limitleri incelenir.

ii)  $x = a$  noktası belirsizlik yaratmıyor ve kritik nokta değilse  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  dır.

**Örnek Soru**



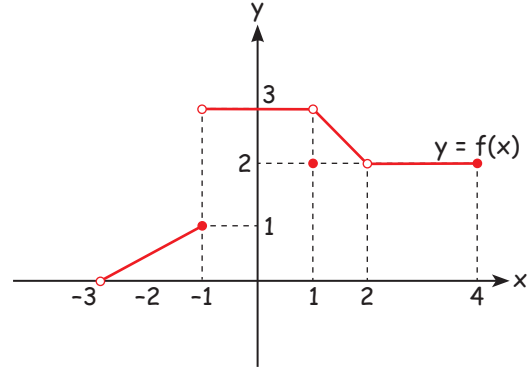
Yukarıda grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonu için aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$								
Sağ limit								
Sol limit								
Limit								

**Biz Çözdük**

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	0	Yok	3	3	1	Yok	0
Sağ limit	0	0	2	3	3	1	1	0
Sol limit	0	-1	2	3	3	1	1	0
Limit	0	Yok	2	3	3	1	1	0

**Örnek Soru**

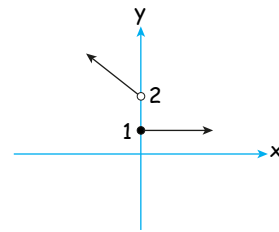


Yukarıda grafiği verilen  $f$  fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- a)  $f(-1) = 1$                       b)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$   
c)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$                 d)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 3$   
e)  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 2$

**Sen Çöz 1**

**Örnek Soru**



Yukarıda grafiği verilen  $f$  fonksiyonu için

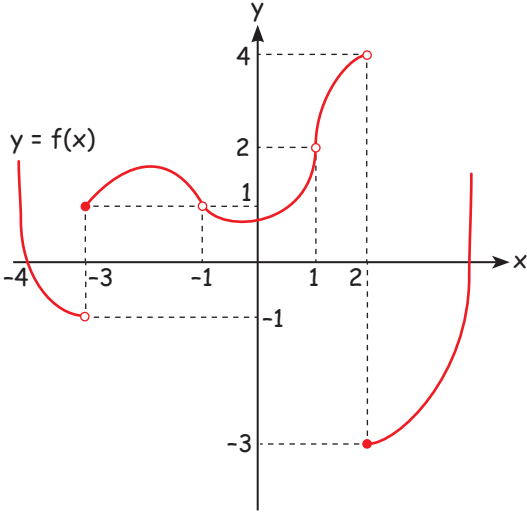
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

değeri kaçtır?

**Sen Çöz 2**

Örnek Soru

Aşağıda  $f(x)$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre aşağıdaki limit değerlerini hesaplayınız.

- a)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$       b)  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$   
c)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} (f \circ f)(x)$       d)  $\lim_{x \rightarrow -3^-} (f \circ f)(x)$

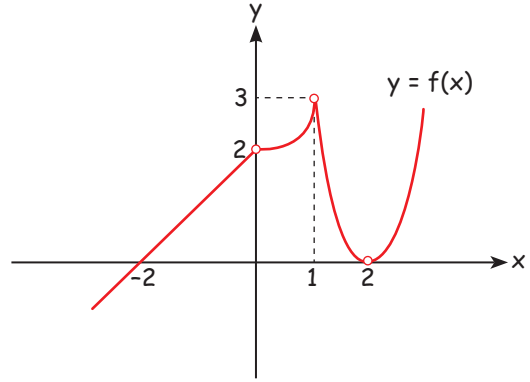
Biz Çözdük

- a)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$   
b)  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -3$   
c)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 1$   
d)  $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$

Örnek Soru

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı  $f(x)$  fonksiyonu için  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$  ve  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 6$  olduğuna göre  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(5-x)}{f(3x-7)}$  değerini bulunuz.

Örnek Soru



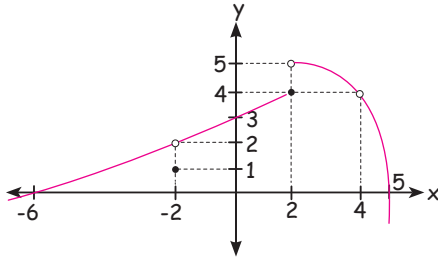
Yukarıda  $f(x)$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (f \circ f)(1-x)$  limitinin değerini bulunuz.

Sen Çöz 3

Biz Çözdük

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(5-x)}{f(3x-7)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)} = \frac{6}{3} = 2$$

**Örnek Soru**

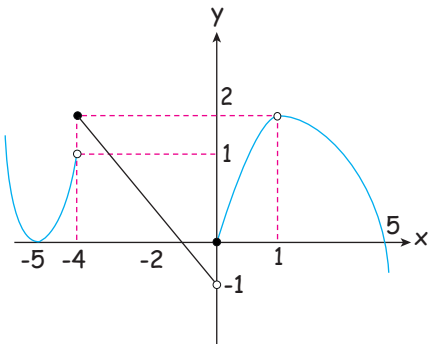


Yukarıda  $y = f(x)$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre aşağıdaki limit değerlerini hesaplayınız.

- a)  $\lim_{x \rightarrow -6} f(x)$     b)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$     c)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$   
d)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$     e)  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$     f)  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

**Sen Çöz 4**

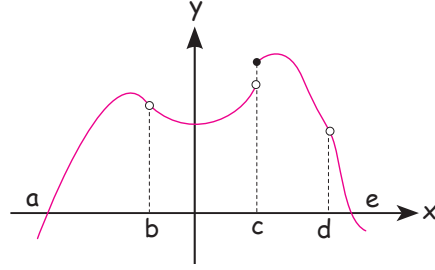
**Örnek Soru**



Yukarıda verilen  $y = f(x)$  fonksiyonunun limiti olmayan  $x$  değerleri toplamı kaçtır?

**Sen Çöz 5**

**Örnek Soru**



Yukarıda verilen  $y = f(x)$  fonksiyonunun kritik noktalarının apsiserini bulunuz.

**Sen Çöz 6**

**Örnek Soru**

Aşağıdaki limit değerlerini hesaplayınız.

- a)  $\lim_{x \rightarrow 4} (3x+1)$     b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x+3}{x+2} \right)$   
c)  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{3x+4}$     d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2x+3} \right)$   
e)  $\lim_{x \rightarrow 7} 2^{\frac{x+1}{2}}$     f)  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x+6}$

**Sen Çöz 7**

**Dikkate Al**

$f$  ve  $g$  fonksiyonları gerçekte sayılar üzerinde tanımlı iki fonksiyon olmak üzere

- a.  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- b.  $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- c.  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

d.  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$

**Örnek Soru**

$f(x)$  ve  $g(x)$  gerçekte sayılarda tanımlı iki fonksiyondur. Bu iki fonksiyonla ilgili aşağıdakileri biliniz.

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  var.                      •  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  var.

**Bu bilgilere göre, aşağıdakileri bulunuz.**

- a)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$  var mıdır?
- b)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$  var mıdır?
- c)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x))$  var mıdır?
- d)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  var mıdır?

**Sen Çöz 8**

**ÖZELLİKLER**

1.  $f(x) = c$  sabit fonksiyon olsun.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$  dir.

2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

4.  $c$  sabit bir sayı olmak üzere

$\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

5.  $n$  pozitif bir tam sayı olmak üzere

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right)^n$

6. Polinom fonksiyonların herhangi bir noktadaki limiti için, değişken yerine verilen sayıyı yazmak yeterlidir.

7.  $g(x) \neq 0$  ve  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$  iken;

$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$

8.  $\sqrt[n]{f(x)}$  gerçekte sayı değerli olmak üzere;

a)  $n$  tek doğal sayı ise;

$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$

b)  $n$  çift doğal sayı,  $f(x) \geq 0$  ve  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$  ise,

$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$  dir.

9.  $\lim_{x \rightarrow x_0} c^{f(x)} = c^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$

10.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\log_a f(x)) = \log_a \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right)$

**Örnek Soru**

Aşağıdaki fonksiyonların yanlarında yazılan  $x$  değerleri için limitlerini bulunuz.

- a)  $f(x) = 4x^2 - x^3 + 3x - 1$ ,  $x = 1$   
 b)  $f(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x^2-x+2}}$ ,  $x = 2$   
 c)  $f(x) = 5^{\frac{3x-1}{x-1}}$ ,  $x = 2$   
 d)  $\lim_{x \rightarrow 2} (\log_3(x+1) - \log_3(x-1))$

**Biz Çözdük**

- a)  $\lim_{x \rightarrow 1} (4x^2 - x^3 + 3x - 1) = 4 - 1 + 3 - 1 = 5$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{\sqrt{x^2-x+2}} = \frac{2+4}{\sqrt{4-2+2}} = \frac{6}{2} = 3$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow 2} 5^{\frac{3x-1}{x-1}} = 5^{\frac{6-1}{1}} = 5^5$   
 d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \log \frac{x+1}{x-1} \right) = \log \frac{3}{1} = \log 3$

**Örnek Soru**

$f(x) = k$  fonksiyonu veriliyor.  
 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 10$  olduğuna göre  $k$  değerini bulunuz.

**Sen Çöz 9**

**Örnek Soru**

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$  ifadesi her  $a$  gerçekte sayı için sağlanmaktadır.  $f(x) = (k+1)x^2 + (m-1)x + n$  olduğuna göre,  $k + m + n$  değerini bulunuz.

**Sen Çöz 10**

**Örnek Soru**

$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - x + 4)$  limitinin değerini bulunuz.

**Sen Çöz 11**

**PARÇALI FONKSİYONLARIN LİMİTLERİ**

Kritik nokta için sağ ve sol limitlerine bakılır. Bu limitler eşitse fonksiyonun kritik noktada limiti vardır.

**Örnek Soru**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 1 \\ 0 & , 1 \leq x < 3 \\ 2x - 3 & , x \geq 3 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $f(x)$  fonksiyonu için aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

- a.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$       b.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$       c.  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

**Biz Çözdük**

a.  $x = 1$  noktası kritik nokta olduğu için sağ ve sol limitlere bakmalıyız.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 0 = 0 \end{aligned} \right\} \text{eşit değiller.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{yoktur}$$

b.  $x = 2$  noktası kritik nokta olmadığı için

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0$$

c.  $x = 3$  noktası kritik nokta olduğu için sağ ve sol limitlere bakmamız gerekir.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} 2x - 3 = 6 - 3 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} 0 = 0 \end{aligned} \right\} \text{eşit değiller.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \text{yoktur.}$$



**Dikkate Al**

Parçalı fonksiyonların tanım kümesinde denklemlerinin değiştiği nokta kritik noktadır.

Örneğin;

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x < a \\ h(x), & x \geq a \end{cases}$$

fonksiyonu için  $x = a$  noktası kritik noktadır.

**Unutma!**

Parçalı fonksiyonda kritik olmayan noktada limit hesaplamak için verilen  $x$  değeri yerine koymak yeterlidir.

**Örnek Soru**

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x + 1, & x \geq 2 \\ x - 2, & x < 2 \end{cases}$$

dir.  $f$  fonksiyonu için aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

**Sen Çöz 12**

**Örnek Soru**

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x+9}, & x > 0 \\ x+4, & x = 0 \\ x^2+3, & x < 0 \end{cases}$$

olduğuna göre  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  in değeri kaçtır?

**Sen Çöz 13**

**Örnek Soru**

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $m, n \in \mathbb{R}$  olmak üzere;

$$f(x) = \begin{cases} mx^2 + 2, & x > 0 \\ m.n, & x = 0 \\ nx + m, & x < 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun  $x = 0$  da limitinin olabilmesi için  $m$  kaç olmalıdır?

**Sen Çöz 14**

**Örnek Soru**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x, & x < 3 \\ 2, & x = 3 \\ 2x - n, & x > 3 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı  $f(x)$  fonksiyonu için  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  var olduğuna göre  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$  i bulunuz.

**Örnek Soru**

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2, & x < 2 \\ 3, & 2 \leq x < 5 \\ 3x - b, & x \geq 5 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan  $f(x)$  fonksiyonu için limiti olmayan noktaların apsiserini bulunuz.

**Sen Çöz 15**

**Sen Çöz 16**

**Örnek Soru**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 2 \\ 3x - 1, & 2 < x < 5 \\ 2x - 3, & x > 5 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan  $f(x)$  fonksiyonu için limiti olmayan noktaların apsiserini bulunuz.

**Sen Çöz 17**

## MUTLAK DEĞER FONKSİYONUNUN LİMİTİ

Mutlak değer fonksiyonunun limitini bulurken mutlak değerini içini sıfır yapan noktada sağ ve sol limitlerine bakılır, bu limitler eşitse o noktada limiti vardır. Geriye kalan noktalarda x değerini fonksiyonda yerine yazmak yeterlidir.



### Örnek Soru

f:  $\mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 + x - 2|}{x - 1}$$

limitinin değerini bulunuz.



### Biz Çözdük

Öncelikle  $|x^2 + x - 2|$  fonksiyonun içini sıfır yapan değerleri bulalım.  
 $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0$   
 $x \quad +2 \quad x = -2, x = 1$   
 $x \quad -1$

x	-2	1
f(x)	+ ○	- ○ +

$$x > 1 \Rightarrow |x^2 + x - 2| = x^2 + x - 2$$

$$x < 1 \Rightarrow |x^2 + x - 2| = -x^2 - x + 2$$

olur.

$x = 1$  kritik nokta olduğu için sağ ve sol limitleri inceleyelim.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} -x^2 - x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+2)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x+2) = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+2) = 3 \end{aligned}$$

$-3 \neq 3$  olduğu için  $x = 1$  de limiti yoktur.



### Örnek Soru

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 5}, & x \geq 2 \\ \frac{24|x-3|}{9-x^2}, & x < 2 \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  değerini bulunuz.



### Sen Çöz 18



### Örnek Soru

Aşağıdaki limit değerlerini hesaplayınız.

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} |x+1|$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} |x+1|$

c)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{|x+3|}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 5} |x| \cdot |x+5|$

e)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x-5|}{|x|}$

f)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x-1|}{x+1}$



### Sen Çöz 19

**Örnek Soru**

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 4|}{x - 2} \text{ limitinin değerini bulunuz.}$$

**Sen Çöz 20**

**Örnek Soru**

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} |x - 3| + |x + 2| \text{ limitinin değerini bulunuz.}$$

**Biz Çözdük**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} |x - 3| + |x + 2| \\ = 0 + 5 = 5 \end{aligned}$$

**Unutma!**

$a \in \mathbb{R}$  ve  $a \neq 0$  olmak üzere;

1.  $\frac{0}{a} = 0$
2.  $a \pm \infty = \pm \infty$
3.  $\infty + \infty = \infty$
4.  $\infty \cdot \infty = \infty$
5.  $a > 0$  ise  $\frac{a}{0^+} \rightarrow +\infty$
6.  $a > 0$  ise  $\frac{a}{0^-} \rightarrow -\infty$
7.  $\frac{a}{\infty} \rightarrow 0$
8.  $\frac{\infty}{a} \rightarrow \pm \infty$
9.  $a \cdot \infty \rightarrow \pm \infty$
10.  $\frac{0}{0^+} \rightarrow 0$  ve  $\frac{0}{0^-} \rightarrow 0$
11.  $\frac{a}{0}$ ,  $\frac{\pm \infty}{0}$  ve  $\frac{0^\pm}{0}$  ifadeleri tanımsızdır.
12.  $\frac{0^\pm}{0^\pm}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$  ifadeleri belirsizdir.

**Örnek Soru**

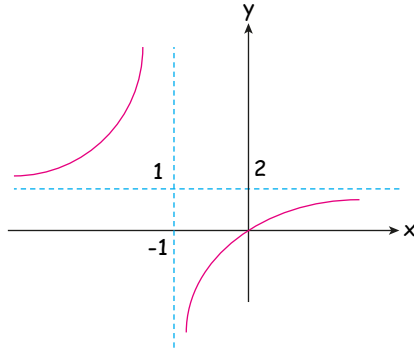
Aşağıdaki ifadelerin limit değerlerini bulunuz.

- |                                                                 |                                                                  |
|-----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{2}{x-1} \right)$      | b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{3}{x-1} \right)$       |
| c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4}{5x+1} \right)$ | d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{7}{6x+1} \right)$  |
| e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{x+4}{x^2} \right)$    | f) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \left( \frac{x-1}{(x-4)^2} \right)$ |
| g) $\lim_{x \rightarrow 0^-} 8^{\frac{1}{x}}$                   | h) $\lim_{x \rightarrow 3^-} 5^{\frac{6}{x-3}}$                  |

**Biz Çözdük**

- |                                                                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{2}{x-1} \right) = \frac{2}{0^+} = +\infty$                                          |
| b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{3}{x-1} \right) = \frac{3}{0^-} = -\infty$                                          |
| c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4}{5x+1} \right) = \frac{4}{+\infty} = 0$                                        |
| d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{7}{6x+1} \right) = \frac{7}{-\infty} = 0$                                       |
| e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{x+4}{x^2} \right) = \frac{4}{0^+} = +\infty$                                        |
| f) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \left( \frac{x-1}{(x-4)^2} \right) = \frac{3}{0^+} = +\infty$                                    |
| g) $\lim_{x \rightarrow 0^-} 8^{\frac{1}{x}} = 8^{\frac{1}{0^-}} = 8^{-\infty} = \frac{1}{8^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$   |
| h) $\lim_{x \rightarrow 3^-} 5^{\frac{6}{x-3}} = 5^{\frac{6}{0^-}} = 5^{-\infty} = \frac{1}{5^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$ |

**Örnek Soru**



Yukarıda verilen  $f(x)$  fonksiyonu için

- I.  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \infty$
- II.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
- III.  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$
- IV.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

ifadelerinden kaç tanesi doğrudur?

- A) 4    B) 3    C) 2    D) 1    E) 0

**Sen Çöz 21**

**Örnek Soru**

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x}$  limitini hesaplayınız.

**Biz Çözdük**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} = \infty + 1 = \infty$$

**1.  $\frac{0}{0}$  BELİRSİZLİĞİ**

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0}$  olması durumunda  $\frac{0}{0}$  belirsizliği ortaya çıkar.

Bu durumda  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarında  $(x - a)$  çarpanı var demektir. Bu çarpanı sadeleştirerek belirsizlikten kurtararak limit hesaplanır.

**Dikkate Al**

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$  oluyorsa mutlaka  $(x - a)$  çarpanını bulmaya çalışmak gerekir.

**Unutma!**

Çarpanlara ayırmadan önce  $\left(\frac{0}{0}\right)$  belirsizliği var mı diye kontrol etmemiz gerekir.

**Dikkate Al**

1.  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
2.  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
3.  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
4.  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
5.  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

**Örnek Soru**

$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 - 2x}{x^3 - x^2 - 2x} \right)$  ifadesinin değerini bulunuz.

**Biz Çözdük**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{4 - 4}{8 - 4 - 4} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

belirsizliği geldi. O halde çarpanlarına ayıralım.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{x(x^2-x-2)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+1)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

**Örnek Soru**

Aşağıdaki ifadelerin limit değerlerini bulunuz.

a)  $\lim_{x \rightarrow y} \left( \frac{x^3 y - x^2 y^2}{x^2 y - x y^2} \right)$       b)  $\lim_{y \rightarrow x} \left( \frac{y\sqrt{x} - x\sqrt{y}}{x^2 - y^2} \right)$

**Sen Çöz 22**

**Örnek Soru**

$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 + ax - 8}{x^2 - x - 2} \right) = b$  için  $a, b \in \mathbb{R}$  ise  $a + b$  toplamını bulunuz.

**Sen Çöz 23**

**Örnek Soru**

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8x+1} - 3}{x^2 - 1}$  limitinin değerini bulunuz.

**Sen Çöz 24**

**Örnek Soru**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$  olmak üzere  $\lim_{y \rightarrow x} \frac{x^3 - y^3}{\sin(3x - 3y)}$  limitinin değerini bulunuz.

**Sen Çöz 25**

**SÜREKLİLİK**

$a \in \mathbb{R}$  olmak üzere;

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  eşitliği sağlanıyorsa

(bir fonksiyonun  $x = a$  noktasındaki değeri ile  $x = a$  noktasındaki limiti eşit ise)  $f$  fonksiyonu  $x = a$  noktasında süreklidir denir.  $f$  fonksiyonu  $x = a$  noktasında sürekli değilse  $f$  fonksiyonuna  $x = a$  noktasında süreksiz fonksiyon denir.

$f$  fonksiyonu  $x = a$  noktasında sürekli ise;

i)  $f$  fonksiyonu  $x = a$  noktasında tanımlıdır.

ii)  $f$  fonksiyonunun  $x = a$  noktasında reel sayı olan limiti vardır.

iii)  $f$  fonksiyonunun  $x = a$  noktasındaki limiti fonksiyonun  $x = a$  için aldığı  $f(a)$  değerine eşittir.

Bu üç koşuldan herhangi biri sağlanmadığında  $f$  fonksiyonu  $x = a$  noktasında süreksizdir.

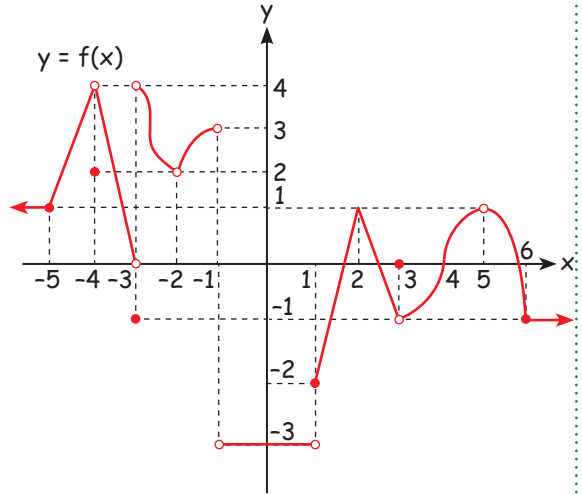
**Unutma!**

- $f(x)$  fonksiyonu  $x = a$  noktasında tanımsız ise süreksizdir.
- $f(x)$  fonksiyonunun  $x = a$  noktasında limiti yoksa süreksizdir.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$  oluyorsa süreksizdir.

**Dikkate Al**

Süreksizlik noktaya bağlıdır.  
Yani  $x = a$  için süreksiz olan bir fonksiyon başka bir noktada sürekli olabilir.  
O yüzden her nokta için ayrı ayrı değerlendirmek gerekir.

**Örnek Soru**



Yukarıda grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonunu sürekli ve süreksiz yapan  $x$  değerlerini bulunuz.

$x$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$												
limit												
süreklilik												

**Biz Çözdük**

$x$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	2	-1	Yok	Yok	-3	-2	1	0	0	Yok	-1
limit	1	4	Yok	2	Yok	-3	Yok	1	-1	0	1	-1
süreklilik	Var	Yok	Yok	Yok	Yok	Var	Yok	Var	Yok	Var	Yok	Var

**Sürekli Olması İçin**

- Limit olmalı
- Görüntü olmalı
- Limit değeri görüntüye eşit olmalı

**Süreksiz Olması İçin**

- Tanımsız olabilir. Yani görüntüsü olmayabilir.
- Limit değeri görüntüden farklı olabilir.
- Sağ limit  $\neq$  sol limit olabilir.

**ÖZELLİKLER**

1.  $f$  fonksiyonu  $x = x_0$  noktasında limitsiz ise, aynı noktada süreksizdir.
2.  $f$  fonksiyonu  $x = x_0$  noktasında limitli ise, aynı noktada sürekli olmak zorunda değildir.
3.  $f$  fonksiyonu  $x = x_0$  noktasında limitli ve tanımlı ise, aynı noktada sürekli olmak zorunda değildir.
4.  $f$  fonksiyonu  $x = x_0$  noktasında sürekli ise, aynı noktada limitlidir.
5.  $f$  fonksiyonu  $x = x_0$  noktasında süreksiz ise, aynı noktada limitsiz olmak zorunda değildir.
6.  $f$  fonksiyonu  $x = x_0$  noktasında tanımlı değilse, aynı noktada süreksizdir.
7.  $f$  fonksiyonu  $(a, b)$  aralığının her elemanında sürekli ise,  $(a, b)$  aralığında süreklidir.
8. Kesirli fonksiyonlar tanımlı oldukları aralıklarda paydalarının sıfır olduğu noktalarda süreksizdir.

**Örnek Soru**

$f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 1 \\ 2x-3, & x < 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $f$  fonksiyonu  $x = 1$  apsisli noktada sürekli midir?

**Sen Çöz 26**

**Örnek Soru**

$f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ 2x-3, & x < 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $f$  fonksiyonu  $x = 1$  apsisli noktada sürekli midir?

**Biz Çözdük**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x-3 = -1 \end{array} \right\} \text{eşit değiller.}$$

O halde süreksizdir.

**Örnek Soru**

$$f(x) = \sqrt{9 - |2x-1|}$$

fonksiyonun sürekli olduğu kümeyi bulunuz.

**Sen Çöz 27**

**Örnek Soru**

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x+3}{2x-1} & x > 3 \\ x+2 & x = 3 \\ -3x+14 & x < 3 \end{cases}$$

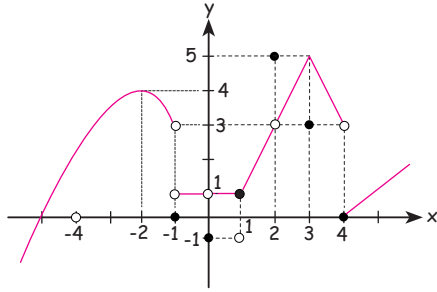
fonksiyonunun;

- a)  $x = 2$                       b)  $x = 3$                       c)  $x = 5$   
noktalarında sürekli olup olmadığını inceleyiniz.

**Sen Çöz 28**



**Örnek Soru**



Şekilde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere  $f(x)$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Aşağıdakilerden hangileri yanlıştır?

- |                                             |                                              |
|---------------------------------------------|----------------------------------------------|
| I. $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 0$      | II. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$     |
| III. $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 1$ | IV. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$        |
| V. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$     | VI. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 4$       |
| VII. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$      | VIII. $\lim_{x \rightarrow (-4)^+} f(x) = 0$ |

**Sen Çöz 29**

**Örnek Soru**

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax+2} & , x < -1 \\ 2x+6 & , -1 \leq x \leq 0 \\ b-2x & , x > 0 \end{cases}$$

fonksiyonu  $\mathbb{R}$  de sürekli olduğuna göre  $b - a$  kaçtır?

**Sen Çöz 30**

ÇİTA YAYINLARI

**Örnek Soru**

$f(x) = \frac{8x+9}{x^2+mx+9}$  fonksiyonu  $\mathbb{R}$  de sürekli ise  $m$  nin alabileceği tam sayı değerlerini bulunuz.

**Sen Çöz 31**

**Örnek Soru**

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-9} & , x < -3 \\ \frac{1}{x^2-4} & , -3 \leq x < 1 \\ \frac{x+1}{4x+6} & , x \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonunun süreksiz olduğu kaç tane  $x$  tam sayı değeri vardır?

**Sen Çöz 32**

**Örnek Soru**

$f(x) = \frac{x^2}{\cot x + \sqrt{3}} - \frac{1}{2 \cos x - 1}$  fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları  $[0, 2\pi]$  aralığında bulunuz.

**Biz Çözdük**

Süreksiz olması için bu fonksiyonda paydanın sıfır olması gerekiyor.

$$\cot x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \cot x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{6}$$

$$2 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$$

$$\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{3} \right\}$$

**Örnek Soru**

$f(x) = \sqrt{3 - \log_2(x+4)}$  fonksiyonu her  $x$  gerçekte sayı için daima sürekli olduğuna göre  $x$  hangi aralıkta olmalıdır?

**Sen Çöz 33**

**Örnek Soru**

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & , x > -1 \\ 6 & , x = -1 \\ bx - 2a & , x < -1 \end{cases}$$

fonksiyonu her  $x$  gerçekte sayı için sürekli bir fonksiyon olduğuna göre  $a \cdot b$  kaçtır?

**Sen Çöz 34**

**Örnek Soru**

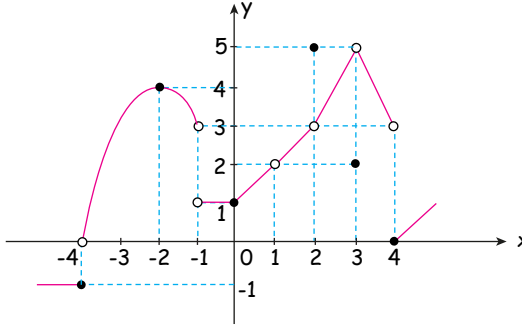
$a$  bir gerçekte sayı olmak üzere,

$$f(x) = \frac{3x+4}{2x^2+ax+2}$$

fonksiyonunun daima sürekli olması için  $a$ 'nın alabileceği değerleri bulunuz.

**Sen Çöz 35**

1.



Şekilde  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere  $f(x)$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

I.  $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = 0$

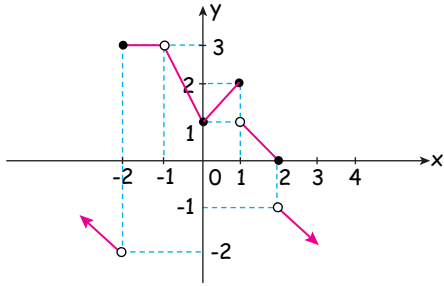
II.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

III.  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 1$

IV.  $\lim_{x \rightarrow (-4)^+} f(x) = 0$

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2.



Şekilde  $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere  $f(x)$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Aşağıdakilerden kaç tanesi yanlıştır?

I.  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$

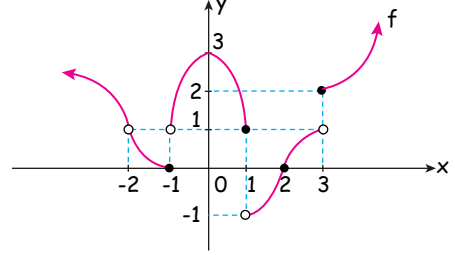
II.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$

III.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

IV.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$

- A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

3.

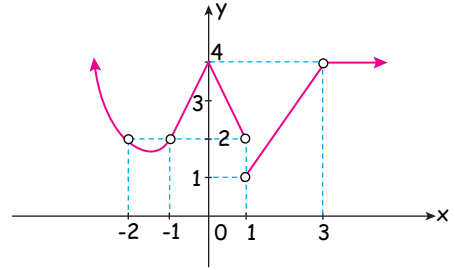


Yukarıdaki şekilde bir  $f(x)$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$f(x)$  fonksiyonunun limitsiz olduğu noktalarındaki apsilerin toplamı kaçtır?

- A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) -1

4.

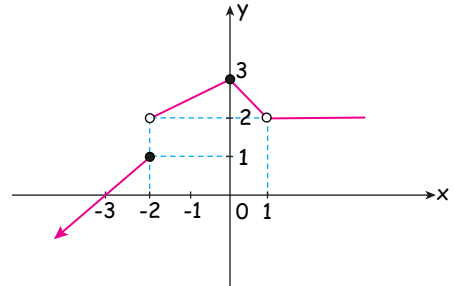


Yukarıdaki şekilde bir  $f(x)$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$f(x)$  fonksiyonunda tanımsız olup limitinin olduğu noktalardaki limit değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) 10 B) 8 C) 7 D) 5 E) 4

5.



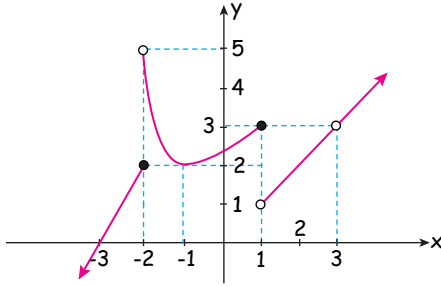
Yukarıdaki şekilde bir  $f(x)$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$f(m) = f^{-1}(3)$  olduğuna göre  $\lim_{x \rightarrow m} f(x)$

ifadesinin sonucu kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

6.



Yukarıdaki şekilde bir  $f(x)$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

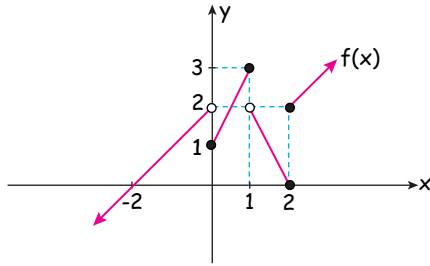
Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} 2f(x) + \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

ifadesinin sonucu kaçtır?

- A) 12    B) 11    C) 10    D) 9    E) 8

7.

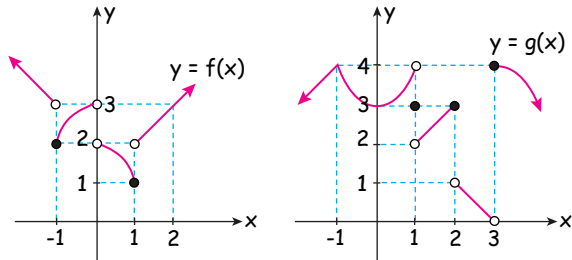


Şekilde  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere  $f(x)$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f \circ f)(x) \text{ kaçtır?}$$

- A) 3    B) 2    C) 1    D) 0    E) -2

8.



$y = f(x)$  ve  $y = g(x)$  fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

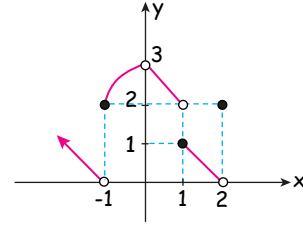
Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (g \circ f)(x) - \lim_{x \rightarrow 2^+} (f \circ g)(x)$$

kaçtır?

- A) 3    B) 2    C) 1    D) 0    E) -1

9.

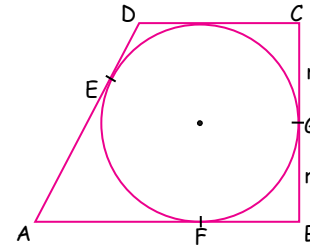


Yukarıda grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonu için,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(1-x) + f(2+x)}{3+f(x)} \text{ limitinin değeri kaçtır?}$$

- A) 1    B)  $\frac{1}{2}$     C)  $\frac{1}{3}$     D)  $\frac{1}{4}$     E)  $\frac{1}{5}$

10.

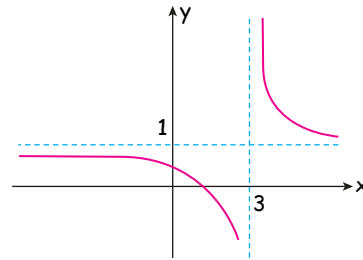


O merkezli çemberin yarıçapı  $r$  ve  $|DE| = 1$  br

olduğuna göre  $\lim_{r \rightarrow 2} \frac{\text{Alan(Daire)}}{|EA|}$  kaçtır?

- A)  $2\pi$     B)  $\frac{\pi}{2}$     C)  $\frac{4\pi}{3}$     D)  $\frac{\pi}{4}$     E)  $\frac{\pi}{5}$

11.



Yukarıda grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonu için

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

toplamı kaçtır?

- A) -1    B) 0    C) 1    D) 2    E) 3

1.  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = a - 3$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = b + 2$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -1$

eşitliklerini sağlayan  $f(x)$  fonksiyonu için  $a^b$  kaçtır?

A) 0    B)  $\frac{1}{9}$     C)  $\frac{1}{8}$     D) 8    E) 9

2.  $f(x) = \begin{cases} (ax+1)^2 - 2a, & x > 1 \\ x^2 - ax + 3, & x \leq 1 \end{cases}$

biçiminde tanımlı  $f(x)$  fonksiyonunun yalnız bir  $x$  değeri için limiti yoktur.

Buna göre  $a$  nın alamayacağı değerlerin toplamı kaçtır?

A)  $-\frac{4}{3}$     B)  $-\frac{5}{4}$     C) -1    D)  $-\frac{3}{4}$     E)  $-\frac{1}{4}$

3.  $f(x) = \begin{cases} |x-1| - 1, & x > 1 \\ |x-|x-1||, & x < 1 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(1-x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(2+x)$

şeklinde verilen  $f(x)$  fonksiyonu için toplamı kaçtır?

A) 0    B)  $-\frac{1}{4}$     C) -1    D)  $-\frac{3}{2}$     E) -2

4.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x+2|}{x+2} + \lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{x+1}{|x+1|} - 2x \right)$

limitinin değeri kaçtır?

A) -2    B) -1    C) 0    D) 1    E) 2

5. Gerçek sayılarda tanımlı  $f(x)$  fonksiyonu için,

- Her  $x_1 < x_2$  için  $f(x_1) < f(x_2)$
- $f(x)$  in  $x = -1$  ve  $x = 2$  de limiti vardır.
- $f(0) = 4$

Buna göre,

I.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 4$

II.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$

III.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) > \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

yargılarından hangisi ya da hangileri daima doğrudur?

A) Yalnız I    B) Yalnız III    C) I ve II  
D) I ve III    E) II ve III

6. A bir gerçekte sayı olmak üzere gerçekte sayılar kümesi üzerinde tanımlı  $f$  ve  $g$  fonksiyonları için

$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} g(x) = A$

eşitliği sağlıyor.

Buna göre,

I.  $\lim_{x \rightarrow 5} (f(x) - g(x)) = 0$

II.  $f(5) = g(5)$

III.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

ifadelerinden hangisi ya da hangileri daima doğrudur?

A) Yalnız I    B) Yalnız II    C) Yalnız III  
D) I ve II    E) II ve III

7.  $\sqrt{x^2 - 2x + 9} \geq f(x) \geq \sqrt{x^2 - 4x + 9}$   
eşitsizliğini sağlayan  $f(x)$  fonksiyonu için  
 $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3x-1}{f(x)} \right)$   
değeri kaçtır?  
A) 3 B)  $\frac{1}{3}$  C) 0 D)  $-\frac{1}{3}$  E) -3

8.  $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x > 1 \\ x+5, & x \leq 1 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} x^3+5, & x \leq -1 \\ 2x^2-p, & x > 1 \end{cases}$   
fonksiyonları veriliyor.  
Buna göre,  
 $\lim_{x \rightarrow -3} (g \circ f)(x)$   
değerinin var olabilmesi için  $p$  kaç olmalıdır?  
A) -2 B) 0 C) 2 D) 4 E) 6

9.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$   
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$   
veriliyor.  
Buna göre  
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left[ \frac{f(3-x)}{2f(1+x)} + f\left(\frac{8}{x+3}\right) \right]$   
limitinin değeri kaçtır?  
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

10.  $f: x \rightarrow$  "x' den küçük en büyük tam sayının en büyük böleni" olarak tanımlanıyor.

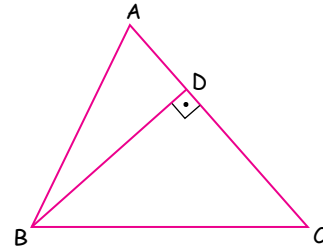
Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow 26^-} \frac{f(x-1)}{f\left(\frac{x+3}{7}\right)}$$

limitinin değeri kaçtır?

- A) 8 B) 6 C) 4 D) 3 E) 2

- 11.



ABC üçgeninde

$[BD] \perp [AC]$ ,

$$|AC| = \frac{x^3-1}{x+2} \text{ birim}$$

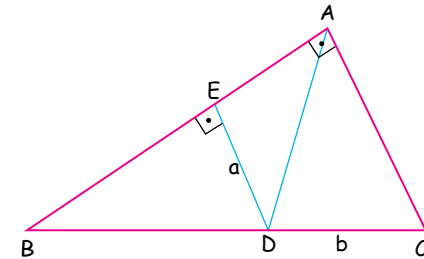
$$|BD| = \frac{8x+40}{3x-3} \text{ birimdir.}$$

Buna göre  $\lim_{x \rightarrow 1^+} A(ABC)$  kaç birimkaredir?

- A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

ÇİTA YAYINLARI

- 12.



$[AB] \perp [AC]$ ,  $[ED] \perp [AB]$

$$|AB| = 8 \text{ cm,}$$

$$|AC| = 6 \text{ cm}$$

$$|ED| = a \text{ cm}$$

$$|DC| = b \text{ cm}$$

olduğuna göre  $\lim_{b \rightarrow 6} a$  kaçtır?

- A) 4 B)  $\frac{16}{5}$  C) 3 D)  $\frac{12}{5}$  E) 2

1.  $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^+} \left( \frac{|\tan x|}{\tan x} + 2 \frac{\cos x}{|\cos x|} + 1 \right)$

limitinin değeri kaçtır?

- A) -2    B) -1    C) 0    D) 1    E) 2

2.  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \left( \frac{|3-x|}{x^2-9} + 2x-1 \right)$

limitinin değeri kaçtır?

- A)  $\frac{31}{6}$     B)  $\frac{29}{6}$     C)  $\frac{25}{6}$     D)  $\frac{23}{6}$     E)  $\frac{19}{6}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - ax - 12}{x - 4} = b$

limitinin değeri bir gerçek sayı olduğuna göre,  $a \cdot b$  kaçtır?

- A) 3    B) 4    C) 5    D) 6    E) 7

4.  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{4^a - 9^a}{8^a - 27^a}$

limitinin değeri kaçtır?

- A) 1    B)  $\frac{2}{3}$     C)  $\frac{1}{2}$     D)  $\frac{1}{3}$     E) -1

5.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x - 1}$  limitinin değeri kaçtır?

- A) 1    B) 2    C) 3    D) 4    E) 5

6.  $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{y} - 1}{y^2 + 2y - 3}$

limitinin değeri kaçtır?

- A)  $\frac{1}{6}$     B)  $\frac{1}{8}$     C)  $\frac{1}{10}$     D)  $\frac{1}{12}$     E)  $\frac{1}{14}$

7.  $\lim_{y \rightarrow x} \frac{x-y}{\frac{3}{x^2} - \frac{3}{y^2}} = \frac{4}{3}$

olduğuna göre x kaçtır?

- A) 1    B) 0    C) -1    D) -2    E) -3

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan x - 2 \cos x}{\sin 4x + 3}$

limitinin değeri kaçtır?

- A)  $\frac{3}{4}$     B)  $\frac{2}{3}$     C)  $\frac{1}{3}$     D)  $-\frac{2}{3}$     E)  $-\frac{4}{3}$

Bilgi :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$

Yukarıda verilen bilgi 9, 10, 11. soruların çözümlerinde kullanılacaktır.

9.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{4-x^2}$

limitinin değeri kaçtır?

- A)  $-\frac{1}{2}$     B)  $-\frac{1}{3}$     C)  $-\frac{1}{4}$     D)  $-\frac{1}{5}$     E)  $-\frac{1}{6}$

10.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \frac{3x}{2} - \sin x^3}{x^3}$

limitinin değeri kaçtır?

- A)  $\frac{27}{8}$     B)  $\frac{25}{8}$     C)  $\frac{23}{8}$     D)  $\frac{21}{8}$     E)  $\frac{19}{8}$

11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4 \cos x}{x \cdot \sin x}$

limitinin değeri kaçtır?

- A) -4    B) -2    C) 2    D) 4    E) 8

12.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin 2x|}{\sqrt{2-2 \cos 2x}}$

limitinin değeri kaçtır?

- A) 2    B) 1    C) -1    D) -2    E) -4



1.  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{\sqrt{x+2} - 3}$

limitinin değeri kaçtır?

- A)  $\frac{2}{3}$     B)  $\frac{3}{4}$     C) 1    D)  $\frac{3}{2}$     E)  $\frac{4}{3}$

2.  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{x+2}{\sqrt{x+a}-1} \right) = b$  ve  $b \in \mathbb{R}$

olduğuna göre  $\frac{a}{b}$  kaçtır?

- A) 2    B)  $\frac{3}{2}$     C) 1    D)  $\frac{2}{3}$     E)  $\frac{1}{3}$

3.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - 3x - 7}{x^2 - 2x - 4}$

limitinin değeri kaçtır?

- A) -2    B) -1    C) 0    D) 1    E) 2

4. Gerçek sayılarda tanımlı her  $x$  için,  
 $6 \geq f(x) \geq 5$   
eşitliği sağlanıyor.

Buna göre,

I.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x+1}$  vardır.

II.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{f(x)}$  vardır.

III.  $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - |f(x)|]$  vardır.

ifadelerinden hangileri her zaman doğrudur?

- A) Yalnız I    B) Yalnız II    C) I ve II  
D) Yalnız III    E) II ve III

ÇİTA YAYINLARI

5.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < -2 \\ -3, & x = -2 \\ bx + 2a, & x > -2 \end{cases}$$

fonksiyonu  $x = -2$  noktasında sürekli olduğuna göre  $3b - 4a$  kaçtır?

- A) 0    B) 1    C) 2    D) 3    E) 4

6.

$$f(x) = \begin{cases} a + 3x, & x < 3 \\ ax - 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

fonksiyonu gerçak sayılar kümesinde sürekli olduğuna göre  $a$  kaçtır?

- A) 2    B) 3    C) 4    D) 5    E) 6

7.  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+ax+9}$

fonksiyonu gerçak sayılar kümesinde daima sürekli ise a kaç tam sayı değeri alabilir?

- A) 13 B) 12 C) 11 D) 10 E) 9

8.  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-4}, & x < -2 \\ \frac{2x-1}{x^2-1}, & -2 \leq x < 2 \\ \frac{4}{2x+3}, & x \geq 2 \end{cases}$

fonksiyonu kaç noktada süreksizdir?

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

9.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $k \in \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} (x+k)^2, & x < -1 \\ -3x+2, & -1 \leq x \leq 3 \\ kx-4, & x > 3 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyor. f fonksiyonunun sürekli olmadığı yalnızca bir nokta olduğuna göre

$$f(4) + f(-2)$$

toplamı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

10.  $f(x) = \begin{cases} a \sin x + b, & x < \frac{\pi}{6} \\ \sqrt{3} \cos x, & x = \frac{\pi}{6} \\ b \frac{\cot x}{\sqrt{3}} - 1, & x > \frac{\pi}{6} \end{cases}$

fonksiyonu  $x = \frac{\pi}{6}$  noktasında sürekli olduğuna göre a - b kaçtır?

- A)  $-\frac{9}{2}$  B)  $-\frac{5}{2}$  C)  $-\frac{1}{2}$  D)  $\frac{1}{2}$  E)  $-\frac{3}{2}$

11. f(x) ve g(x) fonksiyonları x = 1 noktasında pozitif değeri ve sürekli iki fonksiyondur.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f-g)(x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (f \cdot g)(x) = 5$$

olduğuna göre

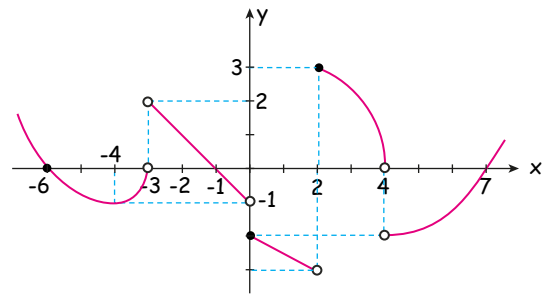
$$\lim_{x \rightarrow 1} (f \circ g)(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$$

değeri kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

ÇİTA YAYINLARI

12.

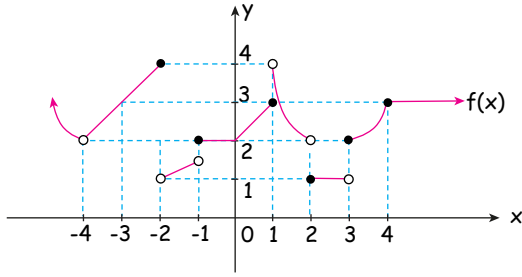


Yukarıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre  $y = |f(x)|$  fonksiyonu  $[-6, 7]$  aralığında apsisi tam sayı olan kaç noktada süreklidir?

- A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

1.



Yukarıda grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonunun  $[-4, 4]$  aralığında var olan limit değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

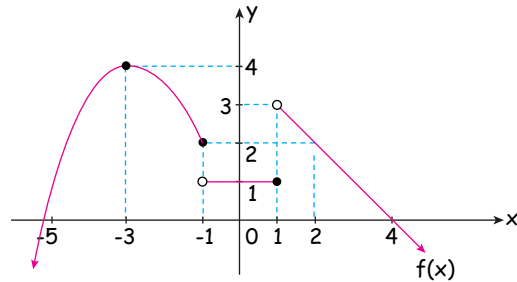
2.

- I. Bir fonksiyon bir noktada tanımsız ise, limitsizdir.  
 II. Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti o noktadaki görüntüsüne eşittir.  
 III. Bir fonksiyonun bir noktada limitli olabilmesi için o noktada sol ve sağ limitlerinin birbirine eşit olması gerekir.  
 IV. Bir fonksiyon bir noktada limitli ise tanımlıdır.

Yukarıdaki öncüllerden kaç tanesi doğrudur?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

3.



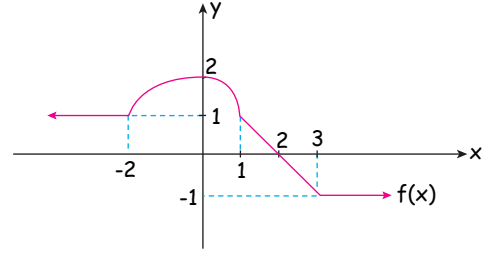
Yukarıda grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonu için

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

toplamı kaçtır?

- A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

4.



Yukarıda grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonu için

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^2(x) + f(x) - 2}{f^3(x) - 1}$$

ifadesi kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

ÇİTA YAYINLARI

5.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1} \text{ limitinin değeri kaçtır?}$$

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

6.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1 - x^2|}{x - 1} \text{ limitinin değeri kaçtır?}$$

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

7.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$  limitinin değeri kaçtır?  
 A)  $\frac{1}{4}$  B)  $\frac{1}{8}$  C) 0 D)  $-\frac{1}{8}$  E) -14

8.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x + a}{x^3 - 1} = b$   
 ifadesinde  $a, b \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $a \cdot b$  kaçtır?  
 A) -3 B) -4 C) -5 D) -6 E) -7

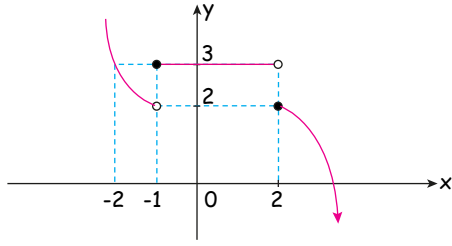
9.  $\lim_{x \rightarrow m} \left( \frac{mx - m^3}{m^4 - x^2} \right)$   
 ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?  
 A)  $\frac{1}{2m}$  B)  $2m$  C)  $\frac{m}{2}$  D)  $-\frac{1}{m}$  E)  $-\frac{1}{2m}$

10.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\sqrt{x+3} + m}{x^3 - 1} \right) = n$   
 ifadesinde  $m, n \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $\frac{m}{n}$  kaçtır?  
 A) -24 B) -22 C) -20 D) -18 E) -16

11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2) \cdot (x+3) \cdot (x+4) \cdot (x+5) - a}{x^2 + 7x} = b$   
 ifadesinde  $a, b \in \mathbb{R}$  olduğuna göre  $a - b$  kaçtır?  
 A) 90 B) 92 C) 94 D) 96 E) 98

12.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{8}} \left( \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x} \right)$  limitinin değeri kaçtır?  
 A) 1 B)  $\frac{1}{2}$  C) 0 D)  $-\frac{1}{2}$  E) -1

1.



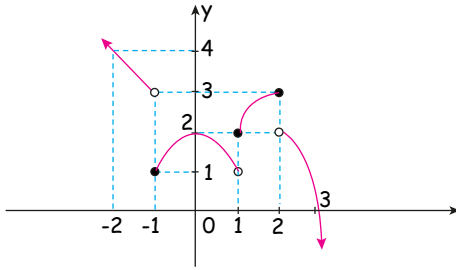
Yukarıda grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonu için

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(3-x^2) + f(-x)}{f(1-x)}$$

limitinin değeri kaçtır?

- A) -2      B) -1      C) 1      D) 2      E) 3

2.



Yukarıda grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonu için

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (f \circ f \circ f)(x)$$
 limitinin değeri kaçtır?

- A) 4      B) 3      C) 2      D) 1      E) 0

3.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{2-x}}$$
 limitinin değeri kaçtır?

- A)  $-\infty$       B) -2      C) 0      D) 2      E)  $\infty$

4.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

eşitliğini sağlayan  $f(x)$  ve  $g(x)$  fonksiyonları gerçekte sayılar kümesi üzerinde tanımlıdır.

Buna göre,

- I.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0$   
 II.  $f(x_0) = g(x_0)$   
 III.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

ifadelerinden hangileri daima doğrudur?

- A) Yalnız I      B) Yalnız II      C) I ve II  
 D) II ve III      E) I, II ve III

ÇİTA YAYINLARI

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{25^x - 16^x}{125^x - 64^x}$$
 limitinin değeri kaçtır?

- A)  $\frac{1}{2}$       B)  $\frac{1}{4}$       C)  $\frac{1}{3}$       D)  $\frac{2}{3}$       E) 1

6.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x+1}{2x-a}, & x < 1 \\ \frac{bx-3}{x+1}, & x \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$
 olduğuna göre,  $a + b$  kaçtır?

- A) 6      B) 7      C) 8      D) 9      E) 10

7.  $m \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $f(x) = \frac{3x-4}{4x^2+mx+9}$  fonksiyonu daima süreklidir.

Buna göre,  $m$  kaç tam sayı değeri alabilir?

- A) 20    B) 21    C) 22    D) 23    E) 24

8.  $n \in \mathbb{Z}$  olmak üzere  $f(x) = \frac{4x^2-5x+1}{x^2-nx+25}$  fonksiyonu en az bir noktada süreksizdir.

Buna göre,  $n$  nin alamayacağı kaç değer vardır?

- A) 19    B) 18    C) 17    D) 16    E) 15

9. Aşağıdakilerden hangisi  $f(x) = \sqrt{7-|2x+1|}$  fonksiyonunun sürekli olduğu kümenin bir elemanı değildir?

- A) 3    B) 0    C) -1    D) -3    E) -5

10.  $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + k, & x < 2 \\ |x-5|, & x = 2 \\ mx-1, & x > 2 \end{cases}$

fonksiyonu  $\forall x \in \mathbb{R}$  için süreklidir.

Buna göre,  $m - k$  kaçtır?

- A) 8    B) 7    C) 6    D) 5    E) 4

11.  $f(x) = \begin{cases} ax+4, & x = 1 \\ x^2-b, & x \neq 1 \end{cases}$

fonksiyonu  $x = 1$  noktasında süreklidir.

Buna göre,  $a + b$  kaçtır?

- A) -4    B) -3    C) 0    D) 1    E) 3

12.  $a \in \mathbb{R}$  olmak üzere, reel sayılarda tanımlı  $f(x)$  fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} -x+a, & x < 0 \\ 2x+3, & 0 \leq x \leq 2 \\ (x+a)^2-18, & x \geq 2 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyor.

$f$  fonksiyonunun sürekli olmadığı yalnız bir nokta olduğuna göre  $a$  kaçtır?

- A) -11    B) -9    C) -7    D) -2    E) 3

1.  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{2+3x}{x^2+x-1} \right)$

limitinin değeri kaçtır?

- A)  $\frac{12}{13}$  B)  $\frac{11}{13}$  C) 1 D)  $\frac{11}{12}$  E) 2

2.  $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x^2) + 3x - 2) = 5$

eşitliğini sağlayan  $f(x)$  fonksiyonu gerçekte sayılarda sürekli bir fonksiyondur.

Buna göre,  $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x+7) - 2x + 5)$  limitinin sonucu kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

3.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{8}^+} \left( \frac{\sin 4x - 1}{\cos 4x} \right)$

limitinin değeri kaçtır?

- A)  $3\sqrt{2}$  B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

4.  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & , x < 1 \\ \frac{1}{x-2} & , 1 \leq x < 3 \\ x^3 + 2x & , x \geq 3 \end{cases}$

fonksiyonu ile ilgili olarak verilen,

- I. Süreksiz olduğu 3 tane değeri vardır.  
II. Tanım kümesi  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  dir.  
III.  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 32$  dir.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) I ve II C) Yalnız III  
D) II ve III E) I, II ve III

5. Gerçek sayılar kümesinde tanımlı  $f(x)$  fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a & , x < 1 \\ x^3 - 3x^2 + 6x - b & , x \geq 1 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyor.

Bu fonksiyonla ilgili,

- $\forall x \in \mathbb{R}$  için süreklidir.
- $f(1) = 2$

bilgileri veriliyor.

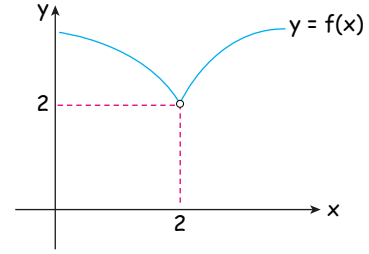
Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1} f(x-1)$$

ifadesinin sonucu kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

6.



Tanım kümesi  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  olan  $y = f(x)$  fonksiyonunun grafiği şekildeki gibidir.

Buna göre,

- I.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  bilinemez.  
II.  $y = f(x)$  fonksiyonu  $x < 1$  için azalandır.  
III.  $f(2) = 2$  olarak fonksiyon tanımlı hale getirilirse ancak o zaman  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$  olur.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II  
D) II ve III E) I ve III

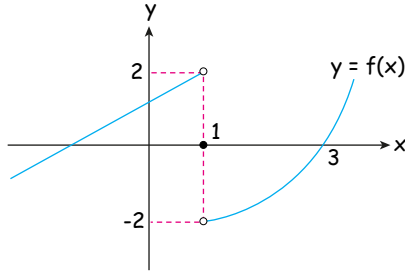
7.

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$$

fonksiyonunun aşağıdaki aralıkların hangisinde en az bir kökü vardır?

- A) [3, 4] B) [2, 3] C) [-1, 1]  
D) [0, 1] E) [1, 3]

8.  $y = f(x)$  fonksiyonunun grafiği şekilde verilmiştir.



$(f + g)$  fonksiyonunun her  $x$  değeri için sürekli olduğu bilindiğine göre,  $g$  fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A)  $g(x) = \begin{cases} f(x) & , x > 1 \\ 2 & , x = 1 \\ \frac{2}{f(x)} & , x < 1 \end{cases}$

B)  $g(x) = \begin{cases} f(x)+1 & , x \neq 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$

C)  $g(x) = \begin{cases} x & , f(x) > 0 \\ 2 & , f(x) = 0 \\ -x & , f(x) < 0 \end{cases}$

D)  $g(x) = \begin{cases} x-3 & , x < 1 \\ 0 & , x = 1 \\ 3-x^2 & , x > 1 \end{cases}$

E)  $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{|f(x)|} & , x > 1 \\ 0 & , x \leq 1 \end{cases}$

9.  $f(x) = 2x^2 + x$  fonksiyonu veriliyor.

Buna göre,

$$\lim_{k \rightarrow 1} \frac{f(1+k) - f(3-k)}{k-1}$$

sonucu kaçtır?

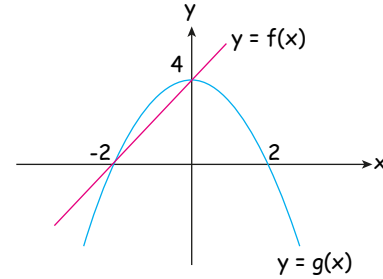
- A) 13    B) 15    C) 16    D) 18    E) 17

10.  $f(x)$ , başkatsayısı ve sabit terimi 1 olan üçüncü dereceden bir polinom fonksiyonu olmak üzere,  
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} f(x) < 0$  sağlanıyor.

$f(x) = 0$  denkleminin kökleri  $x_1, x_2, x_3$  olmak üzere,  $x_1 < x_2 < x_3$  bağıntısı sağlanıyorsa kökleri ile ilgili aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A)  $x_1 < 0 < x_2 < 2 < x_3$   
 B)  $0 < x_1 < x_2 < x_3 < 2$   
 C)  $0 < x_1 < 2 < x_2 < x_3$   
 D)  $x_1 < 0 < x_2 < x_3 < 2$   
 E)  $x_1 < x_2 < 0 < 2 < x_3$

11.



Yukarıdaki şekilde  $f(x)$  ve  $g(x)$  fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

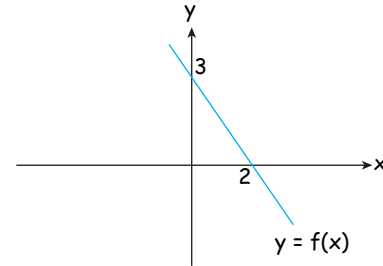
Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{-2g(x)}$$

limitinin değeri kaçtır?

- A)  $\frac{1}{2}$     B)  $\frac{1}{3}$     C) 0    D)  $-\frac{1}{3}$     E)  $-\frac{1}{2}$

12.



Yukarıda  $y = f(x)$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)}$$

limitinin sonucu kaçtır?

- A)  $\frac{8}{9}$     B)  $\frac{9}{7}$     C)  $\frac{9}{8}$     D)  $\frac{7}{9}$     E)  $\frac{3}{4}$



## DEĞİŞİM ORANI

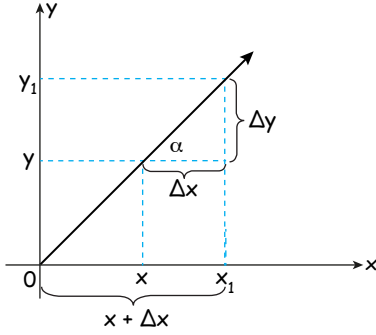
$y = f(x)$  fonksiyonunun değişim miktarını  $\Delta y$ ,  $x$  in değişim miktarını  $\Delta x$  ile gösterelim. Şekilde;

$\Delta x = x_1 - x$  ve  $\Delta y = y_1 - y$  olmak üzere

$m = \tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$  oranına **değişim oranı** denir.

Diğer taraftan  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  olduğundan de-  
ğişim oranı

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ tir.}$$



### Dikkate Al

Değişim oranı ortalama hız bulunurken kullanılır.

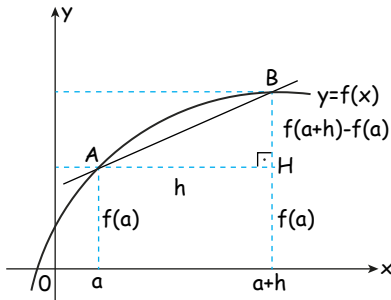
### Örnek Soru

Bir hareketlinin  $t$  saatte aldığı yol (km),  
 $s(t) = 50t + t^2$  fonksiyonu ile veriliyor.

**Bu hareketlinin ilk 5 saatteki ortalama hızı kaç km/sa'tir?**

### Biz Çözdük

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{50 \cdot 5 + 25 - 0}{5 - 0} = 55$$



Şekilde  $\frac{|BH|}{|AH|} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  ise

değişim oranı  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  dir.

AB doğrusunun eğimi,  $m = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  olur.

$h$  daha küçük seçilerek sifıra yaklaştırıldığında B noktası A noktasına yaklaşır.

$h \rightarrow 0$  için limit durumunda B noktası A ile çakışır ve

AB doğrusu A noktasında  $y = f(x)$  eğrisine gelir.

$h \rightarrow 0$  durumunda

$$m = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

oranı **anlık değişim oranını** verir.

Bir fonksiyonun anlık değişim oranına **türev** denir.

Bir fonksiyonun bir noktadaki türevi aynı noktadaki te-  
ğetin eğimine eşittir.

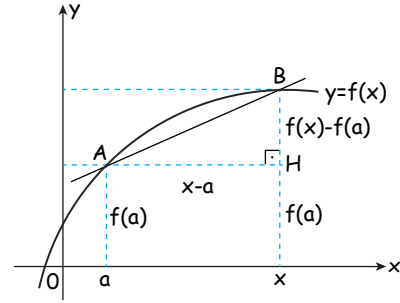
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \text{ değeri varsa bu değere}$$

$y = f(x)$  fonksiyonunun  $x_0$  noktasındaki türevi denir.

$f'(x_0)$  veya  $\frac{dy}{dx}(x_0)$  sembollerinden biri ile gösterilir.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Veya şöyle bir tanım daha yapabiliriz.



AB doğrusunun eğimi  $m = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  dir.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$  bir fonksiyon ve

$x_0 \in (a, b)$  olsun.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ değeri varsa bu değere}$$

$y = f(x)$  fonksiyonunun  $x_0$  noktasındaki türevi denir.

Sonuç olarak, gerekli şartlar altında

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \text{ ya da}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

şeklinde türevi tanımlayabiliriz.

**Tanım**

$A \subset \mathbb{R}$  ve  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$  fonksiyonu  $x_0 \in A$  da sürekli olsun.

1)  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  limitinin bir gerçektek sayı değeri varsa bu değere  $f(x)$  fonksiyonunun  $x = x_0$  noktasındaki **sağdan türevi** denir.  $f'(x_0^+)$  şeklinde gösterilir.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0^+)$$

2)  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  limitinin bir gerçektek sayı değeri varsa bu değere  $f(x)$  fonksiyonunun  $x = x_0$  noktasındaki **soldan türevi** denir.  $f'(x_0^-)$  şeklinde gösterilir.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0^-)$$

Bir fonksiyonun  $x_0$  noktasında sağdan ve soldan türevleri var ve birbirine eşitse fonksiyonun  $x_0$  noktasında türevi vardır denir.

**Türevin Gösterimi**

$y = f(x)$  fonksiyonunun  $x$  değişkenine göre

1. dereceden türevi  $\frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}, y', f'(x)$

2. dereceden türevi  $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2f(x)}{dx^2}, y'', f''(x)$

3. dereceden türevi  $\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^3f(x)}{dx^3}, y^{(3)}, f^{(3)}(x)$

4. dereceden türevi  $\frac{d^4y}{dx^4}, \frac{d^4f(x)}{dx^4}, y^{(4)}, f^{(4)}(x)$

n. dereceden türevi  $\frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^nf(x)}{dx^n}, y^{(n)}, f^{(n)}(x)$

ile gösterilir.

$y = f(x)$  in 2. dereceden türevi 1. türevinin türevidir.

Yani  $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{df(x)}{dx} \right)$  olarak yazılır.

$\frac{d}{dx}$  ifadesine **türev operatörü** denir.



**Dikkate Al**

Anlık değişim hızı türevle bulunur.



**Örnek Soru**

Doğrusal olarak hareket eden bir hareketlinin saat olarak zamana bağlı yer değişimi km olarak  $f(t) = 3t^2 + 2$  fonksiyonu ile tanımlandığına göre **bu hareketlinin 20. saatteki anlık değişim hızını türevin tanımı yardımıyla bulunuz.**

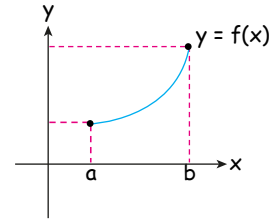


**Biz Çözdük**

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 20} \frac{f(t) - f(20)}{t - 20} \\ &= \lim_{t \rightarrow 20} \frac{3t^2 + 2 - 3 \cdot 20^2 - 2}{t - 20} \\ &= \lim_{t \rightarrow 20} \frac{3(t^2 - 20^2)}{t - 20} \\ &= \lim_{t \rightarrow 20} \frac{3(t - 20)(t + 20)}{t - 20} \\ &= 3 \cdot 40 = 120 \end{aligned}$$



**Örnek Soru**



Yukarıda  $y = f(x)$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir. **Buna göre f fonksiyonu için,**

I.  $[a, b]$  aralığındaki ortalama değişim hızı

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ dir.}$$

II.  $[a, b]$  aralığındaki ortalama değişim hızı pozitifdir.

III.  $[a, b]$  aralığındaki ortalama değişim hızı negatiftir.

**yargılarından hangileri doğrudur?**



**Biz Çözdük**

I.  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  ortalama değişim hızıdır. (Doğru).

II.  $f(b) > f(a)$  ve  $b > a$  olduğu için ortalama değişim hızı pozitiftir. (Doğru)

III. Bir önceki öncül doğru olduğu için bu öncül yanlıştır.

**Örnek Soru**

- $f(2) = 3$
  - $f'(x) = 5x^2 - 7x$
- olduğuna göre

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2}$$

limitinin değerini bulunuz.

**Sen Çöz 36**

**Örnek Soru**

$f(x) = x^2 + 4x + 1$   
fonksiyonunun türevini tanım yardımıyla bulunuz.

**Sen Çöz 37**

**TÜREV ALMA KURALLARI**

1.  $y = c$  ise  $y' = 0$  (c reel sayı)
2.  $y = ax^n$  ise  $y' = anx^{n-1}$
3.  $y = f(x) \pm g(x)$  ise  $y' = f'(x) \pm g'(x)$
4.  $y = f(x) \cdot g(x)$  ise  $y' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
5.  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$  ( $g(x) \neq 0$ ) ise  $y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$
6.  $y = f^n(x)$  ise  $y' = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$
7.  $y = \sqrt{f(x)}$  ise  $y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
8.  $y = \frac{1}{x}$  ise  $y' = -\frac{1}{x^2}$

**Örnek Soru**

- a)  $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + x^3 + x + \sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}$
- b)  $f(x) = \frac{x+1}{5x-4}$

**Sen Çöz 38**

**Örnek Soru**

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a)  $y = 2x$

b)  $f(x) = 4x^3$

c)  $f(a) = 3a^2$

d)  $f(b) = 2xb^3$

e)  $f(x) = x^{-5}$

f)  $f(x) = \frac{6}{x}$

g)  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

h)  $f(x) = \frac{4}{\sqrt[5]{x^3}}$

**Sen Çöz 39**

**Örnek Soru**

$a > b$  ve  $f(x) = a\sqrt{x^b} + a^b$

olduğuna göre  $\frac{df(x)}{dx}$  ifadesinin eşitini bulunuz.

**Sen Çöz 40**

**Örnek Soru**

$f(x) = (x - 7) \dots (x - 1)x$

olduğuna göre  $f'(6)$ 'yı bulunuz.

**Sen Çöz 41**

**Örnek Soru**

Bir hareketlinin  $t$  saniyede aldığı yol (metre)

$x(t) = 2t^2 - 5t + 12$  denkleminde verilmektedir.

Bu hareketlinin 20. saniyedeki hızını bulunuz.

**Biz Çözdük**

Bir hareketlinin anlık hızı türev yardımı ile bulunur.

$x'(20)$  deki değeridir bulmaya çalıştığımız.

$x'(t) = 4t - 5 \Rightarrow x'(20) = 80 - 5 = 75$  m/sn

**BİLEŞKE FONKSİYONUN TÜREVİ (ZİNCİR KURALI)**

$y = f(u)$   
 $u = g(x)$  } ise  $y = f(g(x)) = fog(x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x)$

Yani  $(fog)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$  dir.

Eğer,

$y = f(u)$ ,  $u = g(t)$ ,  $t = h(x)$  olsaydı

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$  olurdu.

**Örnek Soru**

$y = \sqrt{3x+1}$ ,  $x = -\frac{5}{t}$ ,  $t = u^2 - u - 1$  ise  $u = 0$  için  $\frac{dy}{du}$  ifadesini bulunuz.

**Sen Çöz 42**

**Örnek Soru**

$f(x) = 3 \cdot \sqrt{2x^2+1} - 3x + 1$  ise  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$  değerini bulunuz.

**Sen Çöz 43**

**Örnek Soru**

$f(x) = x^3 - 1$ ,  $g(x) = x^2 + 2x$  ise  $y = fog(x)$  in  $x = 1$  deki türevini bulunuz.

**Sen Çöz 44**

**Örnek Soru**

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a)  $f(x) = (x^2 - 2x + 1)^5$

b)  $f(x) = (x + 4) \cdot (x^2 - 5)^2$

**Sen Çöz 45**

**Örnek Soru**

$f(3x + 1) = x^3 - 4x + 9$   
ise  $f(-2)$  .  $f'(-2)$  değerini bulunuz.

**Sen Çöz 46**

**Örnek Soru**

$f(x + y) = f(x) - f(y) - 2xy$  fonksiyonu veriliyor.  
 $f'(-1) = 3$  olduğuna göre  $f'(2)$  yi bulunuz.

**Sen Çöz 47**

**Alıştırma**

**Örnek Soru**

$f(x) = x^2 - 2x + \sqrt[3]{x^2}$  fonksiyonu veriliyor.

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$  değerini bulunuz.

**Çöz Pekiştir 1**

**Örnek Soru**

$f(x) = \frac{2x+1}{g(x)}$ ,  $g(2) = 1$  ve  $g'(2) = -1$  olduğuna göre  $f'(2)$  yi bulunuz.

**Çöz Pekiştir 2**

**Örnek Soru**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + x, & x \leq 1 \\ \frac{4}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $f$  fonksiyonuna göre  $f(1) + f'(0) + f'(2)$  yi bulunuz.

**Çöz Pekiştir 3**

**Örnek Soru**

$$\frac{d}{da} \left[ \frac{d}{db} (a^3 b^2 + 4ab - 2a^2 b^3) \right]$$

ifadesinin eşitini bulunuz.

**Çöz Pekiştir 4**

**Örnek Soru**

$y = f(x) = x^3 - 2ax^2 - x + b$  fonksiyonu veriliyor.

$$f(-1) = 2 \text{ ve } \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=1} = -6$$

olduğuna göre  $b - a$  yı bulunuz.

**Çöz Pekıştır 5**

**Örnek Soru**

\*  $a$  tek doğal sayıdır.

$$* f(x) = \frac{b+1}{2} x^a$$

$$* g(x) = 3bx^{a-1}$$

$$* f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h+2) - g(2)}{h}$$

veriliyor.

Buna göre  $a$ 'nın  $b$  türünden eşitini bulunuz.

**Çöz Pekıştır 6**

**TERS FONKSİYONUN TÜREVİ**

$A \subset \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}$  ve  $f: A \rightarrow B$  fonksiyonu bire bir ve örten olsun.  $f$  fonksiyonu  $x_0 \in A$  noktasında türevli ve  $f'(x_0) \neq 0$  ise  $f^{-1}: B \rightarrow A$  fonksiyonu da  $x_0$  in  $f$  altındaki görüntüsü olan  $y_0$  noktasında türevlidir ve

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \text{ dir.}$$

**Örnek Soru**

$$f: [-3, +\infty) \rightarrow \left[ \frac{23}{4}, +\infty \right)$$

$f(x) = x^2 + 3x + 8$  olduğuna göre  $f^{-1}(x)$  fonksiyonunun  $x = 12$  noktasındaki türevini bulunuz.

**Biz Çözdük**

$y_0 = 12$  olarak alınırsa  $x_0$ 'ı bulmalıyız.

$$10 = x^2 + 3x + 8 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x+4)(x-1) = 0$$

$$\begin{array}{cc} x & +4 \\ x & -1 \end{array}$$

$x_1 = -4, x_2 = 1$  olabilir. Tanım kümesine baktığımızda 1 bu kümenin elemanı olduğu için  $x_0 = 1$  almalıyız.

$$(f^{-1})'(12) = \frac{1}{f'(1)} \text{ formülünden yararlanalım.}$$

$$f'(x) = 2x + 3$$

$$f'(1) = 2 + 3 = 5$$

$$(f^{-1})'(12) = \frac{1}{5}$$

**Örnek Soru**

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$f(x) = x^3 + 6x$  olduğuna göre  $(f^{-1})'(7)$  değerini bulunuz.

**Sen Çöz 48**

## YÜKSEK MERTEBEDEN (DERECEDEN) TÜREV

$y = f(x)$  fonksiyonu bir  $A$  kümesinde türevli olsun. Eğer  $f$  nin türev fonksiyonu olan  $f'$  fonksiyonu da bir  $A_1 \subset A$  kümesinde türevli ise, bu yeni türev fonksiyonuna  $f$  nin ikinci mertebeden (sıradan) türevi denir ve  $f''$  ya da  $\frac{d^2y}{dx^2}$  ile gösterilir.

O halde;

$$f''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dx^2} \text{ dir.}$$

Benzer biçimde  $f$  nin 3. sıradan türevi

$$f'''(x) = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right) = \frac{d^3y}{dx^3} \text{ dir.}$$

ve genel olarak  $f$  nin  $n$ -inci sıradan türevi

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \right) = \frac{d^ny}{dx^n} \text{ olur.}$$

### Örnek Soru

$y = x^{19} + x^{18}$  fonksiyonunun 19. türevini bulunuz.

### Biz Çözdük

Yüksek mertebeden türev almak için 1. türevden başlayarak bir kural yakalayana kadar türev almaya devam etmeliyiz. Bir polinomun yüksek dereceden türevini bulmak için daha küçük dereceli bir polinomla başlayıp bir kural yakalayabiliriz. Mesela  $P(x) = x^3$  polinomunun 3. türevini bulalım.  $P'(x) = 3x^2$ ,  $P''(x) = 3 \cdot 2x$ ,  $P'''(x) = 3!$  Bir de 4. türevi bulunursa  $P^{IV}(x) = 0$  dir. O hâlde  $y^{(19)} = 19!$  olur.

### Örnek Soru

$$f(x) = \frac{1}{2x-1}$$

ise  $f^{(50)}(0)$  değerini bulunuz.

### Sen Çöz 49

## TÜREVİN FİZİKSEL YORUMU

### Dikkate Al

Eğer sorunun içinde "değişim hızı", "anlık hız", "artış hızı" gibi ifadeler bulunuyorsa bu soru türev sorusudur.

### Örnek Soru

Küresel bir balon şişirilmekte ve hacmi saniyede  $1,2 \text{ m}^3$  artarken yüzey alanı da saniyede  $0,6 \text{ m}^2$  artmaktadır. Bu esnada yarıçapın ulaştığı büyüklüğü bulunuz.

### Biz Çözdük

Değişim hızını bulmak için verilen fonksiyonun zamana göre türevini almak gerekir. Kürenin yüzey alanının değişim hızı  $0,6 \text{ m}^2/\text{sn}$  ise

$$\frac{dA}{dt} = 0,6 \text{ dır.}$$

Hacminin değişim hızı  $1,2 \text{ m}^3/\text{sn}$  ise  $\frac{dV}{dt} = 1,2$  dir.

$$\text{Hacim} = V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$\text{Alan} = A = 4\pi r^2$$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow \frac{dV}{dt} &= \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} \Rightarrow 1,2 = \frac{4}{3} \pi 3r^2 \cdot \frac{dr}{dt} \\ \Rightarrow \frac{dA}{dt} &= \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} \Rightarrow 0,6 = 8\pi r \cdot \frac{dr}{dt} \end{aligned} \right\} \text{ oranlayalım}$$

$$\frac{1,2}{0,6} = \frac{4\pi r^2}{8\pi r} \cdot \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{dr}{dt}} \Rightarrow 2 = \frac{r}{2} \Rightarrow r = 4 \text{ olmalı.}$$





**Örnek Soru**

Hava ile şişirilmekte olan küresel bir balonun  $r$  yarıçapındaki artış hızı  $r = 4$  cm olduğunda  $0,5$  cm/sn dir. Bu andaki hacminin değişim hızını bulunuz.



**Sen Çöz 50**



**Örnek Soru**

20 m uzunluğunda bir merdivenin üst tarafı dikey duvara alt tarafı yatay duvara dayalıdır. Merdivenin alt tarafı dakikada 3 m hızla duvardan uzağa çekilirken bu uzaklık 12 metre olduğu anda merdivenin üst tarafının aşağıya dakikada kaç m hızla düştüğünü bulunuz.



**Sen Çöz 51**

**TÜREVİN VARLIĞI**

**1. Sağ ve Sol Türev:**

$a, b \in \mathbb{R}$  ve  $x_0 \in (a, b)$  olmak koşuluyla;  
 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu tanımlanmış olsun.

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

sonucuna sağ türev,

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

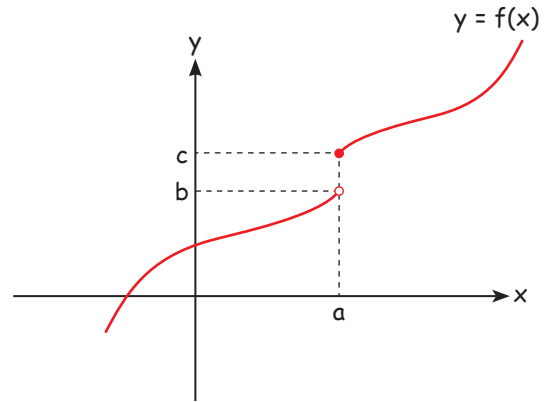
sonucuna sol türev denir.

$x = x_0$  noktasında sağ ve sol türevler birbirine eşitse fonksiyon  $x = x_0$  noktasında türevlenebilir.

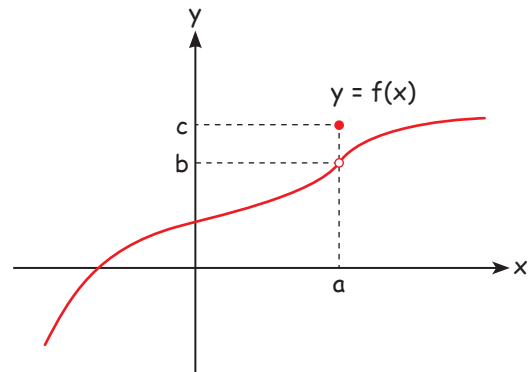
**2. Türevle Süreklilik Arasındaki İlişki:**

$f$  fonksiyonu  $x_0$  noktasında türevli ise bu noktada süreklidir. Bu özellikten şu sonuçları çıkarabiliriz;

a)  $f$  fonksiyonu  $x_0$  da sürekli değilse türevli de değildir.



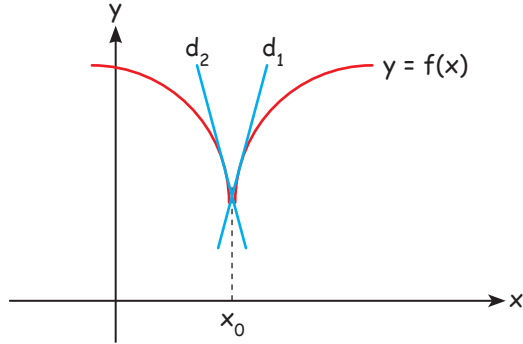
$f'(a)$  yoktur.



$f'(a)$  yoktur.

Gerçekten bu noktalarda teğet çizilemez ya da teğetler birbirinden farklıdır.

b)  $f$  fonksiyonu  $x_0$  da sürekli olduğu halde bu noktada türevli olmayabilir.



$x = x_0$  noktasında sağdan teğet doğrusu  $d_1$ , soldan teğet doğrusu  $d_2$  ve  $d_1 \neq d_2$  yani  $m_1 \neq m_2$  olduğundan  $f'(x_0)$  yoktur.

### Unutma!

Bir fonksiyonun sürekli olup da türevli olmadığı noktalara **kırılma noktaları** veya **sivri noktalar** denir.

### Örnek Soru

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 7, & x > 2 \\ 4x + 1, & x \leq 2 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonun  $x = 2$  deki türevini varsa bulunuz.

### Biz Çözdük

Öncelikle süreklilik incelenmelidir.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - x + 7 = 4 - 2 + 7 = 9 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 4x + 1 = 8 + 1 = 9 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} x = 2 \\ \text{için} \\ \text{süreklili} \end{array}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x > 2 \\ 4, & x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow f'(2^+) = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \\ f'(2^-) = 4$$

$3 \neq 4$  olduğu için türevi yoktur.

### Örnek Soru

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 - 2, & x < -1 \\ 3x^2 + b, & x \geq -1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun her noktada türevli olması için  $b$  yi bulunuz.

### Sen Çöz 52

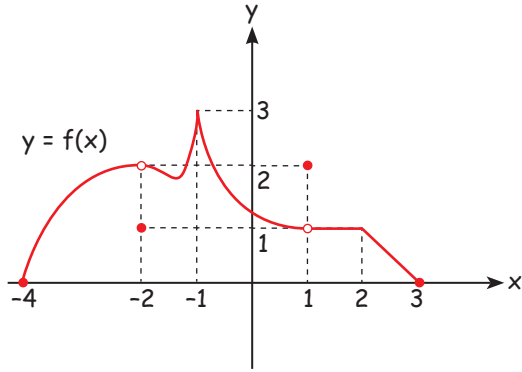
### Örnek Soru

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 - 4}, & x < 3 \\ \frac{1}{x - 9}, & x \geq 3 \end{cases}$$

fonksiyonunun türevsiz olduğu kaç nokta vardır?

### Sen Çöz 53

**Örnek Soru**



Yukarıda verilen  $f(x)$  fonksiyonu için aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)								
f'(x)								

**Sen Çöz 54**

**Unutma!**

Bir fonksiyonun herhangi bir noktada türevinin olması için öncelikle sürekli olması gerekmektedir. Fakat sürekli olması o noktada türevi olduğunu göstermez. Aynı zamanda verilen noktada türevli olması için sağ türevin sol türeve eşit olması gerekir.

**Örnek Soru**

$$f(x) = \begin{cases} nx^2 - 2mx & , x > 2 \\ mx + 2 & , x \leq 2 \end{cases}$$

biçiminde tanımlı  $f(x)$  fonksiyonu  $x = 2$  apsisli noktasında sürekli olduğu hâlde türevli değildir. Buna göre  $n$  nin alamayacağı değer kaçtır?

**Sen Çöz 55**

**Örnek Soru**

$$f(x) = \begin{cases} kx^3 - mx + 2n & , x < -1 \\ mx + n & , -1 \leq x \leq 1 \\ (k+1)x^2 + (m-1)x - n & , x > 1 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan  $f(x)$  fonksiyonu  $x = -1$  noktasında süreksiz olup  $x = 1$  noktasında türevli olduğuna göre  $m$ 'nin alamayacağı değeri bulunuz.

**Sen Çöz 56**

### MUTLAK DEĞER FONKSİYONUNUN TÜREVİ

1.  $f(a) = 0$  iken  $f'(a) \neq 0$  ise  $|f(x)|$  fonksiyonu  $x = a$  noktasında türevsizdir.
2.  $f(a) = 0$  iken  $f'(a) = 0$  ise  $|f(x)|$  fonksiyonu  $x = a$  noktasında türevlidir ve türevi sıfırdır.
3.  $f(a) \neq 0$  iken
  - i)  $f(a) > 0$  ise  $y = |f(x)|$  fonksiyonunun  $x = a$  noktasındaki türevi  $y' = f'(a)$  dir.
  - ii)  $f(a) < 0$  ise  $y = |f(x)|$  fonksiyonunun  $x = a$  noktasındaki türevi  $y' = -f'(a)$  dir.

#### Örnek Soru

$y = |x^2 - 1|$  fonksiyonunun türevli olduğu noktaları inceleyiniz.

#### Biz Çözdük

$f(x) = x^2 - 1$  için  
 $f'(x) = 2x$  dir.  
 $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$  ve  $x = -1$  için  $f(1) = 0$  ve  $f(-1) = 0$  dir.  
 $\left. \begin{array}{l} f'(1) = 2 \neq 0 \\ f'(-1) = -2 \neq 0 \end{array} \right\}$  O hâlde bu noktalarda türevsizdir.

Yani türevli olduğu yerler  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$  dir.

#### Örnek Soru

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f(x) = |x^2 - 9|$   
 ise  $f'(3)$  değerini bulunuz.

#### Sen Çöz 57

#### Örnek Soru

$f(x) = x^2 |x^3 - 5|$  ise  $f'(1)$  değerini bulunuz.

#### Sen Çöz 58

#### Örnek Soru

Aşağıdaki fonksiyonların  $x = 2$  noktasında türevlerinin olup olmadıklarını inceleyiniz.

- a)  $f(x) = x - 2$
- b)  $g(x) = |x - 2|$
- c)  $h(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$

#### Sen Çöz 59

#### Örnek Soru

$f(x) = |(x-1)x(x+1)^2|$   
 fonksiyonu hangi apsisli noktalarda türevsizdir?

#### Sen Çöz 60

#### Örnek Soru

$f(x) = |(x-2)x(x^2-4)|$   
 fonksiyonu hangi apsisli noktalarda türevsizdir?

#### Sen Çöz 61

### L'HOSPİTAL KURALI

Bir fonksiyonun herhangi bir noktasındaki limiti hesaplanırken  $\frac{0}{0}$  belirsizliği ile karşılaşırsa L'Hospital kuralı uygulanarak belirsizlik kaldırılır.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0} \text{ oluyorsa}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

#### Örnek Soru

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{3-x} \text{ sonucunu bulunuz.}$$

#### Biz Çözdük

Önce  $\frac{0}{0}$  çıkıyor mu kontrol edelim.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{3-x} = \frac{2 - \sqrt{3+1}}{3-3} = \frac{0}{0}$$

L'Hospital kuralı uygulayalım.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{-1} = \frac{1}{2\sqrt{3+1}} = \frac{1}{4}$$

#### Örnek Soru

$f'(4) = 2$  için  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4-2h)}{h}$  ifadesinin değerini bulunuz.

#### Sen Çöz 62

#### Örnek Soru

$\mathbb{R}$  de tanımlı ve türevlenebilir bir  $f$  fonksiyonu

için  $f(x+y) = f(x) + f(y) + 4xy$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = -3 \text{ ise } f'(2) \text{ yi bulunuz.}$$

#### Sen Çöz 63

### TÜREVİN POLİNOMLARA UYGULANMASI

$P(x) = (x-a)^n$ .  $Q(x)$  olsun.

$$P'(x) = n \cdot (x-a)^{n-1} \cdot Q(x) + Q'(x) \cdot (x-a)^n$$

$$= (x-a)^{n-1} \cdot B(x)$$

yazılırsa,

$P'(x)$ in  $(x-a)^{n-1}$  ile bölüldüğü anlaşılır.

#### Örnek Soru

$P(x) = x^3 - 3x^2 + ax - b$  polinomu  $(x+1)^2$  ile tam bölünebildiğine göre  $a - b$  yi bulunuz.

#### Biz Çözdük

$P(-1) = 0$  ve  $P'(-1) = 0$  olmalıdır.

$$x = -1 \Rightarrow P(-1) = -1 - 3 - a - b = 0 \Rightarrow a + b = -4$$

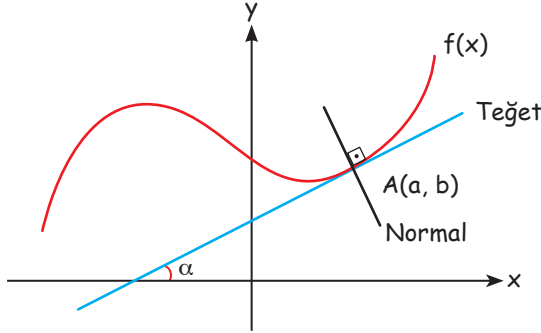
$$P'(x) = 3x^2 - 6x + a \Rightarrow P'(-1) = 3 + 6 + a = 0$$

$$a = -9 \Rightarrow b = 5$$

$$a - b = -9 - 5 = -14$$

### TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU

Bir fonksiyonun  $x = a$  noktasındaki türevi  $x = a$  apsisi noktasından çizilen teğetin eğimini verir.



$$m_T = f'(a) = \tan \alpha$$

$$m_N \cdot m_T = -1 \Rightarrow m_N = -\frac{1}{f'(a)}$$

olduğuna göre buradan teğet ve normal denklemlerini bulabiliriz.

Teğet denklemi;  $y - b = f'(a)(x - a)$

Normal denklemi;  $y - b = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$

#### Örnek Soru

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x$   
fonksiyonunun  $x = 2$  apsisi noktasından çizilen teğetin denklemini bulunuz.

#### Biz Çözdük

Bir fonksiyonun herhangi bir  $(x_0, y_0)$  noktasından geçen teğetin eğimi  $m_T$  olmak üzere

$$m_T = f'(x_0) \text{ dir.}$$

$$m_T = f'(2) \text{ olmalıdır.}$$

$$y - f(2) = m_T(x - 2) \text{ dir.}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$$

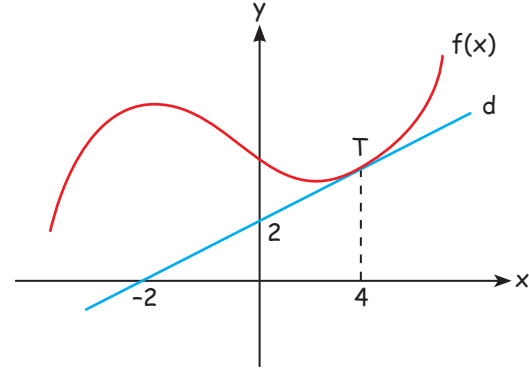
$$f'(2) = 12 - 16 + 5 = 1 \Rightarrow m_T = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 8 - 16 + 10 = 2$$

$$A(2, 2) \text{ ve } m_T = 1 \Rightarrow y - 2 = 1 \cdot (x - 2)$$

$$\Rightarrow y = x \text{ teğet denklemdir.}$$

#### Örnek Soru

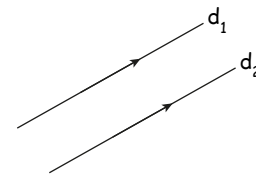


$f(x)$  fonksiyonu  $x = 4$  noktasında  $d$  doğrusuna teğettir.

$g(x) = x^2$  .  $f(x)$  ise  $g'(4)$  değerini bulunuz.

#### Sen Çöz 64

#### Dikkate Al



$$d_1 // d_2 \Rightarrow m_1 = m_2 \text{ dir.}$$

İki doğru paralelse eğimleri eşittir.

**Örnek Soru**

$f(x) = x^3 - ax^2 - x + 1$   
fonksiyonunun  $x = -1$  apsisli noktasındaki teğeti  $y - 2x + 5 = 0$  doğrusuna paralel olduğuna göre  $a$  nın değerini bulunuz.

**Sen Çöz 65**

**Örnek Soru**

$f(x) = x^3 - 2ax + b$  eğrisi  $x = 1$  apsisli noktasında  $x$  eksenine teğet ise  $a + b$  yi bulunuz.

**Sen Çöz 66**

**Örnek Soru**

$f(x) = x^2 + 1$   
fonksiyonunun  $y = x - 4$  doğrusuna en yakın noktasının koordinatlarını bulunuz.

**Sen Çöz 67**

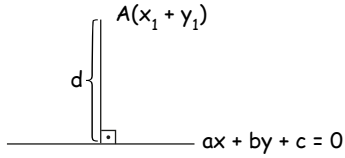
**Örnek Soru**

$y = x^2 + mx + 2$   
eğrisinin  $x$  eksenini kestiği noktalardan çizilen teğetlerin birbirine dik olması için  $m$  nin alabileceği değerleri bulunuz.

**Sen Çöz 68**

**Dikkate Al**

Bir noktanın bir doğruya uzaklığı



$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  formülüyle hesaplanır.

**Örnek Soru**

$f(x) = x^2 - 1$  eğrisi ile  $y - x + 2 = 0$  doğrusu arasındaki en kısa uzaklığı bulunuz.

**Sen Çöz 69**

**Örnek Soru**

$$f(x) = mx^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}x + 1$$

fonksiyonunun  $x = -2$  apsisli noktasındaki teğetin  $x$  eksenine pozitif yönde  $30^\circ$  lik açı yapması için  $m$  yi bulunuz.

**Sen Çöz 70**

**Örnek Soru**

$y = 8x^2$  parabolünün  $x = 4$  apsisli noktasındaki teğeti  $x$  eksenini hangi noktada keser?

**Sen Çöz 71**



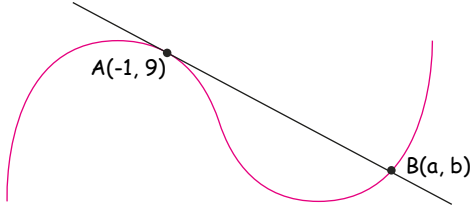


**Örnek Soru**

$y = 6x^2 - 3x^3$   
eğrisinin  $A(-1, 9)$  noktasındaki teğeti eğriyi başka hangi noktada keser bulunuz.



**Biz Çözdük**



Şekilde görüldüğü gibi bir durum olmalıdır.

$B(a, b)$  noktası  $f(x)$  üzerinde olduğu için

$f(a) = b$  dir.

$$b = 6a^2 - 3a^3$$

Ayrıca  $A$  ve  $B$  noktalarından çizilen doğrunun

eğimi aynı zamanda teğet eğimidir.

$$m_T = m_{AB} \Rightarrow m_T = \frac{b-9}{a+1}$$

$$m_T = f'(-1)$$

$$f'(x) = 12x - 9x^2 \Rightarrow f'(-1) = -12 - 9 = -21$$

$$-21 = \frac{b-9}{a+1} \Rightarrow -21a - 21 = b - 9$$

$$\Rightarrow -21a - 12 = 6a^2 - 3a^3$$

$$\Rightarrow 3a^3 - 6a^2 - 21a - 12 = 0$$

$$\Rightarrow a^3 - 2a^2 - 7a - 4 = 0$$

Bu denklemin kökleri  $a_1, a_2, a_3$  olsun.  $x = -1$  noktasında teğet olduğu için bu köklerden iki tanesi

$-1$  dir.  $a_1 = -1$  ve  $a_2 = -1$  olsun. Üçüncü dereceden

denklemin kökler çarpımı formülünden

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 4 \Rightarrow (-1) \cdot (-1) \cdot a_3 = 4 \Rightarrow a_3 = 4$  olur.

$B$  noktasının apsisi  $4$  olur.  $b = 6 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4^3$

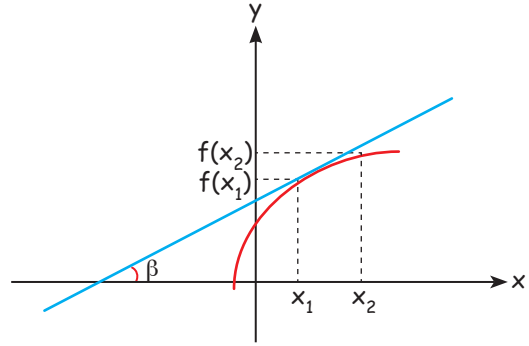
$$= 6 \cdot 16 - 3 \cdot 64$$

$$= 96 - 192 = -96$$

$B(4, -96)$  noktası olarak bulunur.

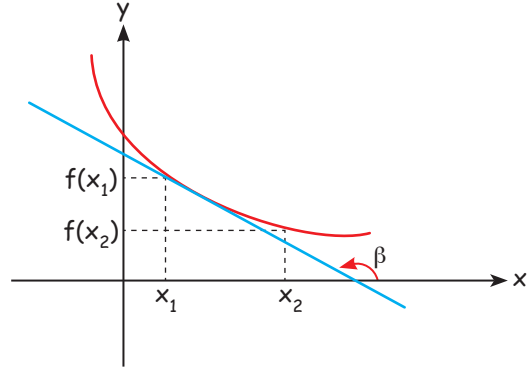
**AZALAN VE ARTAN FONKSİYONLAR**

1.  $x_1 < x_2$  ise  $f(x_1) < f(x_2)$  ya da  $f'(x) > 0$  ise  $f$  artan fonksiyondur.



$f(x)$  eğrisinin herhangi bir teğeti  $x$  eksenine ile dar açı yapacağından  $f'(x) > 0$  dir.

2.  $x_1 < x_2$  iken  $f(x_1) > f(x_2)$  oluyorsa ya da  $f'(x) < 0$  ise  $f$  azalan fonksiyondur.



$f(x)$  eğrisinin herhangi bir teğeti  $x$  eksenine ile geniş açı yapacağından  $f'(x) < 0$  dir.



**Örnek Soru**

$$y = 2x^3 - x^2 + 5$$

fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.



**Biz Çözdük**

Artan veya azalan aralıkları bulmak için  $f'(x)$  in işaret tablosunu incelememiz gerekir.

$$f'(x) = 6x^2 - 2x = 0 \Rightarrow 2x(3x - 1) = 0$$

$$x = 0 \vee x = \frac{1}{3}$$

$x$		$0$		$\frac{1}{3}$	
$f'(x)$	+	$\circ$	-	$\circ$	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Artan olduğu aralıklar  $= (-\infty, 0] \cup [\frac{1}{3}, \infty)$   
Azalan olduğu aralık  $= [0, \frac{1}{3}]$

**Dikkate Al**

Artan ve azalan aralıklar alınırken sınır değerleri dahil etmeyi unutma.

**Örnek Soru**

$$y = \frac{x^3}{3} + mx^2 + x + 1$$

fonksiyonunun daima artan olması için  $m$  nin aralığını bulunuz.

**Sen Çöz 72**

**Örnek Soru**

$f: [3, 6] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu tanımlanıyor.

$\forall x \in [3, 6]$  için  $f$  fonksiyonu azalan ise aşağıdakilerden hangileri kesinlikle doğrudur?

- I.  $f(x) > f(3)$
- II.  $f(x) < f(6)$
- III.  $f(x) < 0$
- IV.  $f(x) > f(0)$
- V.  $f(4) > f(5)$

**Sen Çöz 73**

**Dikkate Al**

Herhangi bir fonksiyonun pozitif tanımlı olması demek  $f(x) > 0$  ve negatif tanımlı olması demek  $f(x) < 0$  demektir. Bir fonksiyonun artan olması için  $f'(x) > 0$  olmalıdır. Bir fonksiyonun azalan olması için  $f'(x) < 0$  olmalıdır.

**Örnek Soru**

$f(x)$ ,  $0 < x < \infty$  aralığında negatif tanımlı ve azalan fonksiyon olduğuna göre aşağıdakilerden kaç tanesi artandır?

- I.  $5x - f(x^2)$
- II.  $x^2 + f(x)$
- III.  $f^2(x)$
- IV.  $-\frac{1}{f(x)}$

**Sen Çöz 74**

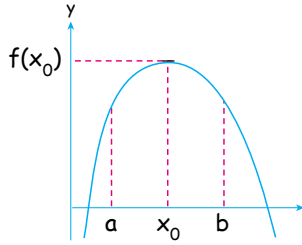
## FONKSİYONLARDA YEREL MAKSİMUM, YEREL MİNİMUM NOKTALARI

### YEREL MAKSİMUM NOKTASI

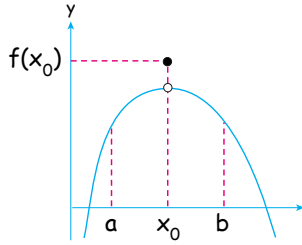
$f : A \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $(a, b) \subset A$  olmak üzere bir  $x_0 \in (a, b)$  için  $f(x_0)$ , fonksiyonun en büyük değeri oluyorsa  $(x_0, f(x_0))$  noktası **yerel maksimum noktasıdır**.

Yerel maksimum noktasının olması için  $x_0$  apsisli noktada  $f$  fonksiyonu sürekli olmak zorunda değildir.

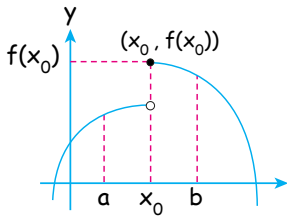
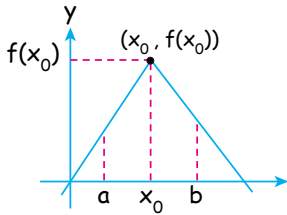
#### Dikkate Al



Yukarıda verilen grafiğe baktığımızda  $(x_0, f(x_0))$  noktası yerel maksimum noktasıdır. Aynı zamanda



bu grafiğe baktığımız zaman da  $(x_0, f(x_0))$  noktası yerel maksimum noktasıdır.

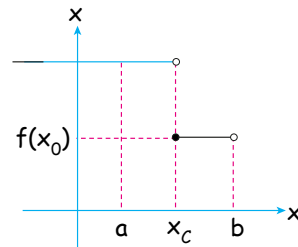
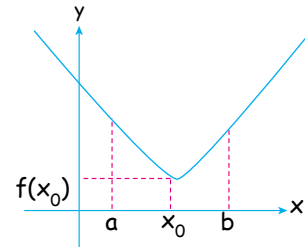
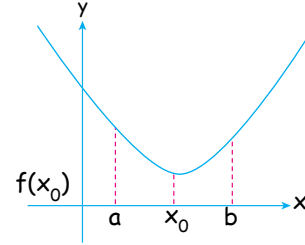


Yukarıda grafikleri verilen fonksiyonlar için de  $(x_0, f(x_0))$  noktası yerel maksimum noktasıdır.

### YEREL MİNİMUM NOKTASI

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $(a, b) \subset A$  olmak üzere bir  $x_0 \in (a, b)$  için  $f(x_0)$  değeri fonksiyon alabileceği en küçük değer oluyorsa  $(x_0, f(x_0))$  noktası **yerel minimum noktasıdır**.

#### Dikkate Al

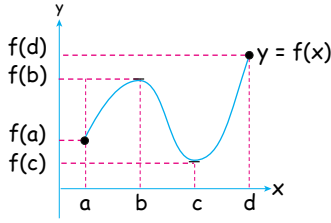


Yukarıda grafikleri verilen fonksiyonlar için  $(x_0, f(x_0))$  noktası yerel minimum noktasıdır.

#### Unutma!

1. Bir fonksiyonun yerel maksimum ve yerel minimum değerlerine genel olarak **ekstremum değerler** denir.
2. Bir fonksiyonun tanımlı olduğu aralıkta alabileceği en büyük değer mutlak maksimum değeri, en küçük değer ise mutlak minimum değeridir.

Örnek Soru



Yukarıda grafiği verilen  $y = f(x)$

- I.  $(a, f(a))$  noktası yerel minimum noktasıdır.
- II.  $(b, f(b))$  noktası yerel maksimum noktasıdır.
- III.  $(c, f(c))$  noktası yerel minimum noktasıdır.
- IV.  $(c, f(c))$  noktası mutlak minimum noktasıdır.
- V.  $(d, f(d))$  noktası mutlak maksimum noktasıdır.
- VI.  $(d, f(d))$  noktası yerel maksimum noktasıdır.

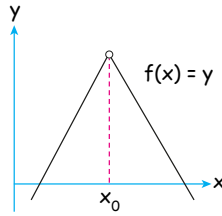
İfadelerinden hangileri doğrudur?

Biz Çözdük

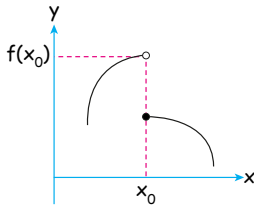
Bütün verilen ifadeler tanımları gereği doğrudur.

Dikkate Al

Bir fonksiyonun tanımlı olmadığı noktalarda ekstremum noktası yoktur.



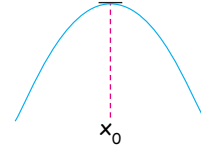
Yukarıda grafiği verilen  $y = f(x)$  fonksiyonunda  $(x_0, f(x_0))$  noktası tanımlı olmadığı için ekstremum nokta değildir.



Aynı durum yukarıdaki grafik için de geçerlidir.

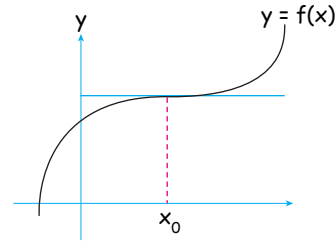
Unutma!

Bir fonksiyonun ekstremum noktalarını bulmak için türeviden faydalanabiliriz.



Yukarıdaki şekilde olduğu gibi  $f(x)$  fonksiyonu için  $x_0$  apsisi noktadan çizilen teğetin eğimi sıfır oluyorsa o noktada yerel maksimum noktası olabilir.

Dikkate Al



Yukarıdaki grafikte görüldüğü gibi  $x_0$  apsisi noktadan çizilen teğetin eğimi sıfır olduğu halde  $(x_0, f(x_0))$  noktası ekstremum nokta değildir.

Unutma!

Bir  $(x_0, f(x_0))$  noktası ekstremum nokta ise,

1.  $f'(x_0) = 0$
  2.  $x_0$  kökü  $f'(x)$  fonksiyonun işaretini değiştiriyor.
- şartları sağlanmalıdır.



**Örnek Soru**

$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x - 1$   
fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını belirleyiniz.



**Biz Çözdük**

Yerel ekstremum noktalarının apsisi  $f'(x)$  fonksiyonunun işaret tablosunda işareti değiştiren köklerdir.

$$f'(x) = 6x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 1$$

$$3x \quad +1$$

$$x \quad -1$$

Tabloya bakalım.

$x = -\frac{1}{3}$  apsisli noktada ve

$x = 1$  apsisli noktada

işaret değiştiği için

o noktalar ekstremum noktalarıdır.

$$\left(-\frac{1}{3}, f\left(-\frac{1}{3}\right)\right), (1, f(1))$$

$$\left(-\frac{1}{3}, -\frac{17}{27}\right), (1, -3)$$

x	$-\frac{1}{3}$	1
f'(x)	+ ○ -	○ +
f(x)	↗	↘



**Örnek Soru**

$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2ax^2 + 6x - 8$  fonksiyonu veriliyor.  
 $f'$  fonksiyonunun  $x = 2$  apsisli noktada yerel minimumunun olması için  $a$  kaç olmalıdır?



**Sen Çöz 75**



**Örnek Soru**

$y = 2x^3 + 6mx^2 - nx - 1$   
fonksiyonunun  $x = 1$  apsisli noktasındaki yerel maksimum değeri  $-9$  ise  $m + n$  kaçtır?



**Sen Çöz 76**



**Örnek Soru**

$f(x) = -x^3 + mx^2 + kx - 2$   
fonksiyonunun  $x = -1$  de yerel minimum  $x = 1$  de yerel maksimum değerinin olması için  $m - k$  kaç olmalıdır?



**Sen Çöz 77**

**Örnek Soru**

$y = 2x^3 + 6x^2 + 12kx - 7$  denklemleri ile verilen  $f$  fonksiyonunun bir yerel ekstremuma sahip olmaması için  $k$ 'nin aralığı ne olmalıdır?

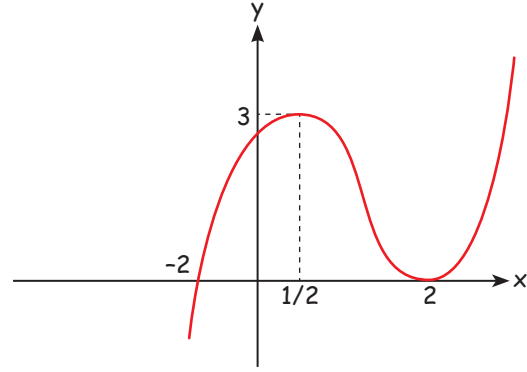
**Sen Çöz 78**

**Örnek Soru**

$y = x^3 + mx^2 - 3x - 4$  fonksiyonu veriliyor.  $f'$  fonksiyonunun yerel minimum değerinin  $-4$  olması için  $m$ 'nin pozitif değeri kaçtır?

**Sen Çöz 79**

**Örnek Soru**

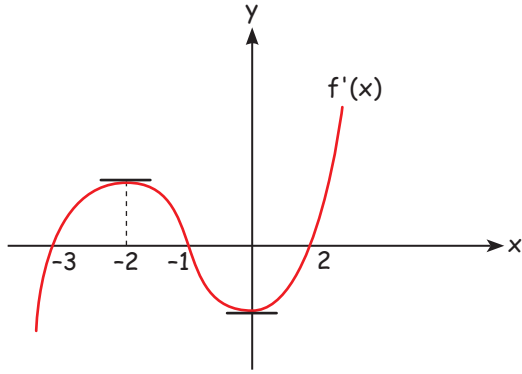


Şekilde  $f(x)$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

- I.  $(-2, \frac{1}{2})$  aralığında  $f(x)$  artandır.
- II.  $f'(3) > f'(1)$
- III.  $f$ 'nin  $x = \frac{1}{2}$  de yerel maksimum değeri vardır.
- IV.  $f$ 'nin yerel ekstremum noktalarının apsissleri toplamı 3 tür.
- V.  $f'(\frac{1}{2}) = f'(2)$
- VI.  $f'(-1) < 0$
- VII.  $f'(1) > 0$
- VIII.  $f(0) > 0$

**Sen Çöz 80**

**Örnek Soru**



Türevinin grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi **yanlıştır**?

- I.  $f$  nin  $x = -2$  de yerel maksimumu vardır.
- II.  $x = 0$  da yerel minimumu vardır.
- III.  $x = -3$  ve  $x = 2$  ekstremum noktalarının apsiseridir.
- IV.  $x = -1$  de yerel maksimum vardır.
- V.  $f(1) > f(2)$

**Sen Çöz 81**

**BİR FONKSİYONUN BİR ARALIKTAKİ EN BÜYÜK VE EN KÜÇÜK DEĞERİ**

**Örnek Soru**

$f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$   
 fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

**Biz Çözdük**

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1 - 6 + 4 = -3$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 8 - 24 + 4 = -12$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(x - 4) = 0$$

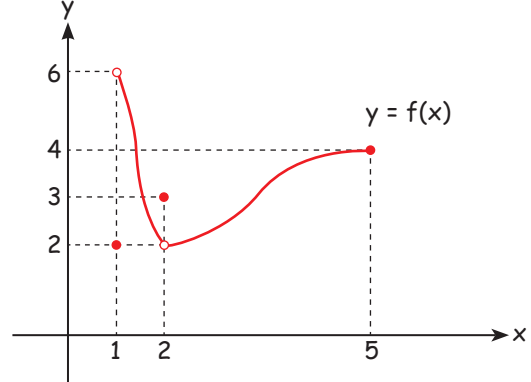
$$\Rightarrow x = 0 \quad x = 4$$

$x$		0		4	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

$x = 0 \in [-1, 2]$  olduğu için  
 $x = 0 \Rightarrow f(0) = 4$   
 Görüntü kümesi :  $[-12, 4]$

**Örnek Soru**

Aşağıda  $f$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



- Buna göre
- I.  $f(x) = 3$  olacak şekilde  $x \in [1, 5]$  vardır.
  - II.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$
  - III.  $f$  fonksiyonunun  $[1, 5]$  aralığında mutlak maksimum değeri yoktur.
- yargılarından hangisi ya da hangileri doğrudur?

**Sen Çöz 82**

### MAX-MİN PROBLEMLERİ

Max min problemlerinde aşağıdaki yol izlenir.

1. Max, min veya en az, en çok ifadesinin ne olduğu belirlenir.
2. Belirlenen bu ifade tek bilinmeyene indirgenir.
3. İndirgenen ifadenin türevi alınıp sifıra eşitlenir.
4. Bulunan değer yerine yazılır.

#### Örnek Soru

$2a - 3b = 18$   
olduğuna göre  $a \cdot b$  en az kaçtır?

#### Biz Çözdük

$a, b$ 'nin en küçük değerini bulmak için bu denklemi tek değişkene düşürüp türev alıp sifıra eşitlemek gerekir.  $2a - 3b = 18$ 'den bir tanesini çelim.

$$2a = 18 + 3b \Rightarrow a = \frac{18 + 3b}{2}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{18 + 3b}{2} \cdot b \right)' = 0 \Rightarrow \left( \frac{18b + 3b^2}{2} \right)' = 0$$

$$18 + 6b = 0 \Rightarrow b = -3, a = \frac{9}{2}$$

$$a \cdot b = -\frac{27}{2}$$

#### Örnek Soru

Çevresi 80 cm olan dikdörtgenler içinde alanı en büyük olanının kenar uzunluklarını bulunuz.

#### Sen Çöz 83

#### Örnek Soru

Bir kenarı 60 cm olan kare şeklindeki bir teneke parçasının köşelerinden eş kareler kesiliyor. Kalan kısım kıvrılarak üstü açık bir kutu yapılıyor. Kutunun hacmi en fazla kaç  $\text{cm}^3$  olur?

#### Sen Çöz 84

#### Örnek Soru

$$y = \frac{3}{x}$$

eğrisi üzerinde birinci bölgede orijine en yakın olan noktayı bulunuz.

#### Sen Çöz 85

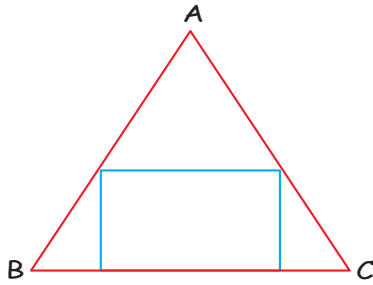


**Örnek Soru**

$x^2 + (1 - 3m)x + 1 + m = 0$   
denkleminde köklerin kareleri toplamının minimum olması için  $m$  yi bulunuz.

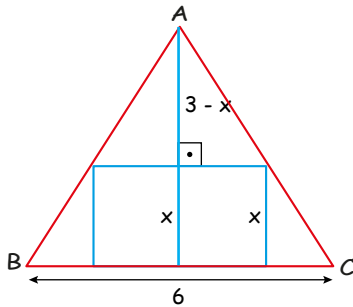
**Sen Çöz 86**

**Örnek Soru**



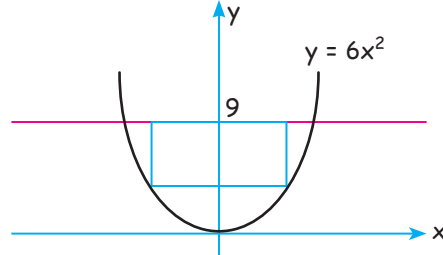
Tabanı 6 cm ve yüksekliği 3 cm olan üçgen içine şekildeki gibi dikdörtgen çiziliyor.  
Dikdörtgenin alanı en fazla kaç  $\text{cm}^2$  olur?

**Biz Çözdük**



Benzerlikten  $\frac{3-x}{3} = \frac{y}{6} \Rightarrow 6-2x=y$   
Alan =  $x \cdot y$  en büyük değerini bulmak için türevini sıfıra eşitlemek gerekir.  
 $[x \cdot (6 - 2x)]' = 0 \Rightarrow (6x - 2x^2)' = 0$   
 $6 - 4x = 0$   
 $x = \frac{3}{2}$  ve  $y = 3$   
Alan =  $\frac{9}{2} \text{ cm}^2$

**Örnek Soru**



Şekilde  $y = 6x^2$  parabolü içine çizilen dikdörtgenin iki köşesi parabol üzerinde, diğer iki köşesi  $y = 9$  doğrusu üzerindedir. Bu dikdörtgenin alanı en fazla kaç birimkaredir?

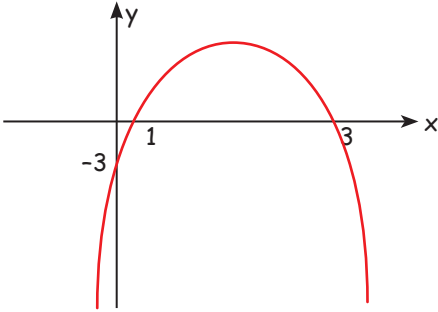
**Sen Çöz 87**

**Örnek Soru**

Yarıçap uzunluğu 16 cm olan bir küre içine yerleştirilen maksimum hacimli dik silindirin yüksekliğini bulunuz.

**Sen Çöz 88**

**Örnek Soru**



Şekilde grafiği verilen  $y = f(x)$  parabolü üzerinde apsisi ve ordinatı toplamı en büyük olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

**Sen Çöz 89**

**Örnek Soru**

Bir ayrıtı  $a$  br olan küp şekerlerin (küp şeklinde) üretim maliyeti hacim üzerinden  $br^3$  başına 6 lira, satış fiyatı ise yüzey alanı üzerinden 24 lira olarak hesaplanmaktadır. Buna göre  $a$  kaç birim olursa küp şekerin satışından elde edilen kar en fazla olur?

**Sen Çöz 90**

**Örnek Soru**

Bir bisiklet festivalinde kişi başı 280 lira ücret alınmaktadır. Kayıt yaptıranların sayısının 160 kişiden fazla olması durumunda 160'ın üzerindeki her bir  $k$  kişi için 1 lira geri ödeme yapılıyor. Katılımcı sayısı 400 kişi ile sınırlıdır. Örneğin; geziye 200 kişi katılırsa herkese 40 lira geri ödeme yapılıyor ve kişi başına 240 lira ücret alınmış olunuyor. Buna göre festivale kaç kişi katılırsa elde edilen gelir en fazla olur?

**Sen Çöz 91**

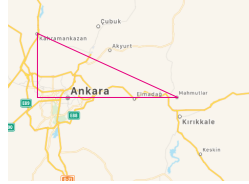
Örnek Soru

Yarıçap uzunluğu 4 cm olan bir çember içine çizilen en büyük alanlı dikdörtgenin çevresi kaç cm dir?

Sen Çöz 92

Örnek Soru

Yandaki harita üzerindeki A, B ve C noktaları bir dik üçgen oluşturmaktadır. C noktasından A noktasına en kısa yoldan gidecek olan Melike, [AC] üzerinde hangi noktada durursa bu noktanın [BC] ve [AB] ye uzaklıkları çarpımı maksimum olur? ( $|AB| = 5$  km,  $|BC| = 12$  km dir.)



Biz Çözdük

Melike'nin üzerinde bulunduğu noktadan [AB] ve [BC] kenarlarına uzaklıkları y ve x olsun. Uzaklıklar çarpımının minimum olması için  $(x \cdot y)' = 0$  olmalıdır. Üçgende benzerliği kullanırsak,

$$\frac{y}{12} = \frac{5-x}{5}$$

$$\Rightarrow 5y = 60 - 12x$$

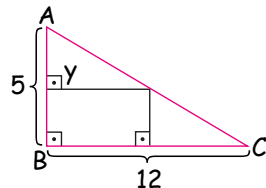
$$y = 12 - \frac{12x}{5}$$

$$x \cdot y = x \left( 12 - \frac{12x}{5} \right) = 12x - \frac{12x^2}{5}$$

$$(x \cdot y)' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 - \frac{24x}{5} = 0$$

$$x = \frac{5}{2}$$



Dikkate Al

Bir hareketlinin gittiği yol, hızı ile yolculuk süresini çarparak bulunur. x yol, v hız ve t süre olmak üzere  $x = v \cdot t$  dir.

Örnek Soru

Genişliği 9 m, kıyıları birbirine paralel iki doğru gibi olan bir ırmağın kıyısındaki bir adam bulunduğu A noktasının tam karşısına gelen ve karşı kıyıda bulunan B noktasından 300 m uzaklıkta kıyıda bulunan C noktasına gitmek istiyor. Kürek çekererek dakikada 8 m, yürüyerek dakikada 10 m yol alan bu adam C noktasına en kısa sürede gidebilmek için yolun ne kadarını ırmakta almalıdır?

Sen Çöz 93

**Örnek Soru**

Bir dikdörtgenin üç kenarının uzunluğu toplamı 60 cm ise **alanı en çok kaç  $\text{cm}^2$  olur bulunuz.**

**Sen Çöz 94**

**Rolle Teoremi**

$y = f(x)$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında sürekli ve  $(a, b)$  aralığında türevlenebilir olmak üzere  $f(a) = f(b)$  ise  $f'(c) = 0$  eşitliğini sağlayan en az bir  $c \in (a, b)$  gerçek sayısı vardır.

**Örnek Soru**

$f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - 2x$$

**fonksiyonunda Rolle teoremini sağlayan  $x$  değerlerini bulunuz.**

**Biz Çözdük**

$$f(-2) = \frac{(-2)^3}{2} - 2(-2) = 0$$

$$f(2) = \frac{2^3}{2} - 2 \cdot 2 = 0$$

$$f(-2) = f(2)$$

$$f'(x) = \frac{3}{2} x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = \frac{4}{3}$$

$$x = \mp \frac{2}{\sqrt{3}}$$

**Ortalama Değer Teoremi**

$y = f(x)$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında sürekli ve  $(a, b)$  aralığında türevlenebilir olmak üzere  $f(a, b)$  aralığında

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

olacak şekilde en az bir  $c \in (a, b)$  gerçek sayısı vardır.

**Örnek Soru**

$f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$f(x) = \sqrt{3x + 4}$$

**fonksiyonunda ortalama değer teoremini sağlayan  $x$  değerini bulunuz.**

**Biz Çözdük**

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{4 - 2}{4} = \frac{3}{2\sqrt{3x + 4}}$$

$$6 = 2\sqrt{3x + 4}$$

$$9 = 3x + 4$$

$$5 = 3x$$

$$\frac{5}{3} = x$$

**Örnek Soru**

$f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$f(x) = x^2 + 2x + 3$$

**fonksiyonunda ortalama değer teoremini sağlayan  $x$  değerini bulunuz.**

**Sen Çöz 95**

1. Doğrusal olarak hareket eden bir hareketlinin zamana (sn) bağlı konumu (metre)

$$x(t) = 2t^2 + t + 1$$

fonksiyonu ile verildiğine göre ilk 4 saniyedeki ortalama hızı kaç m/sn'dir?

- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

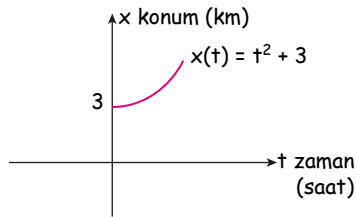
2. Doğrusal olarak hareket eden bir hareketlinin zamana (sn) bağlı konumu (metre)

$$x(t) = 2t^2 + t + 1$$

fonksiyonu ile verildiğine göre 4. saniyedeki hızı kaç m/sn'dir?

- A) 9 B) 12 C) 13 D) 15 E) 17

3. Doğrusal olarak hareket eden bir hareketliye ait konum-zaman grafiği

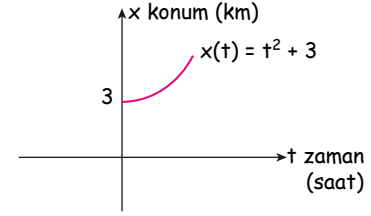


şeklindedir.

Bu hareketlinin 1. ve 4. saatler arasındaki ortalama hızı kaç km/s'dir?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

4. Doğrusal olarak hareket eden bir hareketliye ait konum-zaman grafiği aşağıdaki gibidir.



Bu hareketlinin 4. ve 1. saatteki hızları farkı kaç km/s dir?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

5.  $f(x) = 3x\sqrt{x}$  fonksiyonu verilsin.

Buna göre,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+1) - f(1)}{h}$$

ifadesinin sonucu kaçtır?

- A) 11 B) 9 C)  $\frac{11}{2}$  D)  $\frac{9}{2}$  E) 3

6.  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$  fonksiyonu veriliyor.

Buna göre  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1)}{4h}$  limitinin sonucu kaçtır?

- A) 11 B) 9 C)  $\frac{11}{2}$  D)  $\frac{8}{3}$  E)  $\frac{7}{2}$

7.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x - \frac{h}{2})}{3h}$$

limitinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A)  $\frac{2}{3} f'(x)$       B)  $\frac{5}{6} f'(x)$       C)  $f'(x)$   
D)  $\frac{f'(x)}{3}$       E)  $2f'(x)$

8.

$f(x)$  fonksiyonu her noktada türevli bir fonksiyon olmak üzere;

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(2+2h) - 4}{2h^2 + 2h} = 36 \text{ 'dır.}$$

$f(2) = 2$  olduğuna göre  $f'(2)$  kaçtır?

- A) 9      B) 8      C) 7      D) 6      E) 5

9.

$f(x)$  doğrusal fonksiyon olmak üzere;  
 $f(0) = 5$  ve

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(-h)}{h} = 24$$

eşitlikleri veriliyor.

Buna göre  $f(2)$  kaçtır?

- A) 19      B) 20      C) 21      D) 22      E) 23

10.

Ortalama değişim hızı  $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$  olarak bulunmaktadır. Bu ifadede  $x$  değerini  $x_1$ 'e yaklaştırırsak  $x_1$  anındaki anlık değişim hızını bulmuş oluruz.

Buna göre  $y = 3x^2 + 4\sqrt{2} - 1$  fonksiyonunun  $x = 4$  apsisli noktasındaki anlık değişim hızı kaçtır?

- A) 21      B) 22      C) 23      D) 24      E) 25

11.

$f(x) = |x^2 - x|$  fonksiyonu veriliyor.

Buna göre

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

limitinin sonucu kaçtır?

- A) 0      B) 1      C) 2      D) 3      E) Yok

12.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 5x + 1, & x \geq 0 \\ x^2 + 1, & x < 0 \end{cases}$$

olduğuna göre  $f'(0)$  kaçtır?

- A) Yok      B) 0      C) 1      D) 3      E) 5

1.  $f(x) = \sqrt{3x^2 + 3}$  olduğuna göre  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{1 - x}$  limitinin sonucu kaçtır?

A)  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$  B)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$  C)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  D) 0 E) 1

2.  $f(x) = \sqrt{3 + 3\sqrt{2x}}$  olduğuna göre  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+2) - f(2)}{h}$  ifadesinin eşiti kaçtır?

A)  $\frac{1}{4}$  B)  $\frac{1}{5}$  C)  $\frac{1}{6}$  D)  $\frac{1}{7}$  E)  $\frac{1}{8}$

3.  $f(x) = (x^3 + 2x)(x^2 - 1)$  fonksiyonu veriliyor.  
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$  ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?  
 A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

4.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 + x^2}}$  olduğuna göre  $f'(1)$  kaçtır?

A)  $\frac{\sqrt{2}}{8}$  B)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  C) 0 D)  $-\frac{\sqrt{2}}{4}$  E)  $-\frac{\sqrt{2}}{8}$

5.  $f'(x) = 2x^3 + 5x^2$   
 $f(2) = 7$   
 olduğuna göre

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 7}{x - 1}$  ifadesinin değeri kaçtır?

A) 34 B) 36 C) 38 D) 40 E) 42

6.  $f(x) = x$  fonksiyonunun  $x = 2$  apsisi noktasındaki türevinin değerini türev tanımından bulmaya çalışan Gizem aşağıdaki adımları takip etmiştir.

1.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2^-)$

2.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x - 2} = 1$

3.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2^+)$

4.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{2 - x} = -1$

5.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

$f'(2)$  yoktur.

Gizem bu adımlardan hangisinde hata yapmıştır?

A) I B) II C) III D) IV E) V

7.  $f(x) = \frac{1}{x}$   
 $g(x) = \frac{2}{x^2}$   
fonksiyonları veriliyor.  
Buna göre  $\frac{f(1)+g'(1)}{g(2)+f'(2)}$  kaçtır?  
A) -12 B) -13 C) -14 D) -15 E) -16

8.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$   
 $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$  fonksiyonları veriliyor.  
 $(f + g)'(x)$  aşağıdakilerden hangisidir?  
A)  $\frac{x+1}{x^2+2x}$  B)  $\frac{1}{2x\sqrt{x}}$   
C)  $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$  D)  $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$   
E)  $\frac{x-1}{2x\sqrt{x}} + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$

9.  $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}$   
fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?  
A)  $-\frac{1}{12x^{12}\sqrt{x}}$  B)  $-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$  C)  $\frac{1}{2x^6\sqrt{x}}$   
D)  $-\frac{1}{2x^6\sqrt{x}}$  E)  $\frac{1}{12^{12}\sqrt{x}}$

10.  $f(x) = \frac{3x^2+1}{\sqrt{x}}$   
fonksiyonunun  $x = 4$  noktasındaki değerinin türevi kaçtır?  
A)  $\frac{143}{16}$  B) 0 C)  $\frac{1}{4}$  D) 4 E)  $-\frac{143}{16}$

11.  $f(x) = \frac{3x^2+1}{\sqrt{x}}$   
fonksiyonunun türevinin  $x = 4$  noktasındaki değeri kaçtır?  
A)  $\frac{143}{16}$  B) 0 C)  $\frac{1}{4}$  D) 4 E)  $-\frac{143}{16}$

12.  $f(x) = 2ax^3$   
 $g(x) = b\sqrt{x}$   
 $f'(-2) = g'(1)$   
olduğuna göre  $\frac{a}{b}$  kaçtır?  
A)  $\frac{1}{6}$  B)  $\frac{1}{12}$  C)  $\frac{1}{24}$  D)  $\frac{1}{48}$  E)  $\frac{1}{96}$

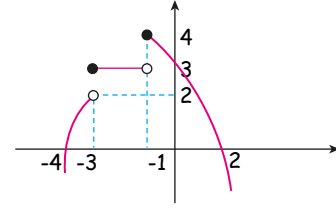


1. • n tek doğal sayı,  
•  $f(x) = 2ax^n$   
•  $g(x) = (a-1)x^n$   
•  $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h-2) - g(-2)}{h}$   
olduğuna göre a kaçtır?  
A) 0 B) -1 C) -2 D) -3 E) -4

2. •  $f(x) = \frac{1}{x^2}$   
•  $g(x) = -x^7$   
fonksiyonları veriliyor.  
Buna göre  $f''(2) + \frac{d^2g(x)}{dx^2} \Big|_{x=0}$  kaçtır?  
A) 1 B)  $\frac{1}{8}$  C)  $\frac{1}{4}$  D)  $\frac{3}{8}$  E)  $\frac{1}{2}$

3.  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 1 \\ 2x, & x < 1 \end{cases}$   
biçiminde tanımlanan  $f(x)$  fonksiyonunun  $x = 1$  noktasında varsa türevi kaçtır?  
A) Yok B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

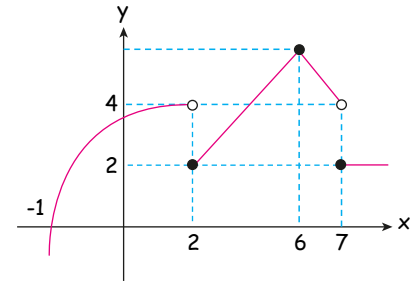
4.



Yukarıda grafiği verilen gerçekte sayılar kümesinde tanımlı  $f(x)$  fonksiyonunun türevli olmadığı noktaların apsisi toplamı kaçtır?

- A) -3 B) -4 C) -5 D) -6 E) -7

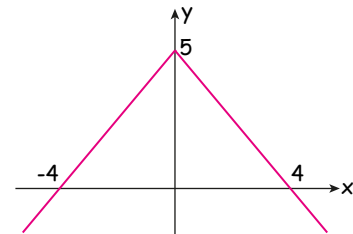
5.



Yukarıda grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonu için,  $f(x)$  in türevli olmayan kaç noktası vardır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6.



Yukarıdaki grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonu için;  $|f(x)|$ 'in türevli olmayan kaç noktası vardır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7.  $f(x) = 3x + 1$   
 $g(x) = x^3 + 2x$   
 olduğuna göre  $\frac{d^2\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)}{dx^2} \Big|_{x=0}$  kaçtır?  
 A) -12 B) -11 C) -10 D) -9 E) -8

8.  $f(x) = \frac{2x+3}{x\sqrt{x+2}}$   
 fonksiyonunun  $x = 4$  noktasındaki türevinin değeri kaçtır?  
 A)  $\frac{17}{100}$  B)  $\frac{13}{100}$  C) 0  
 D)  $-\frac{13}{100}$  E)  $-\frac{17}{100}$

9.  $f(x) = 2(x^2 + 1)^2$   
 $g(x) = 4x^2 + 3x + 1$  fonksiyonları veriliyor.  
 Buna göre  $(f \circ g)(x)$  fonksiyonunun  $x = 0$  noktasındaki türevinin değeri kaçtır?  
 A) 37 B) 42 C) 48 D) 50 E) 54

10.  $g(1) = 4$ ,  $g'(1) = 2$  ve  $(f \circ g)'(1) = 12$   
 olduğuna göre  $f'(4)$  kaçtır?  
 A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

11.  $f^3(x^2 + x) = 7x + \frac{1}{x}$   
 olduğuna göre  $f'(2)$  kaçtır?  
 A)  $\frac{1}{6}$  B)  $\frac{1}{5}$  C)  $\frac{1}{4}$  D)  $\frac{1}{3}$  E)  $\frac{1}{2}$

12.  $f(2x - 1) - g(-3x^2) = x^3 - 1$   
 olduğuna göre  $f'(1) + 3g'(-3)$  ifadesinin değeri kaçtır?  
 A)  $\frac{3}{2}$  B) 1 C) 0 D) -1 E)  $-\frac{3}{2}$

1.  $y = \frac{1}{t} - t^2$

$t = x^2 - 1$

olduğuna göre  $\frac{dy}{dx}$  ifadesinin  $x$  türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A)  $\frac{-2x}{(x^2-1)} - 4x(x^2-1)$

B)  $\frac{-2x}{(x^2-1)^2} - 4x(x^2-1)$

C)  $-\frac{1}{2x} - 4x(x^2-1)$

D)  $-2x$

E) 0

2.  $f(x) = x^2 - x + 1$

$x = 2t^2$

olduğuna göre  $\frac{d(f(x))}{dt}$  ifadesinin  $t = 1$  için sonucu kaçtır?

A) 12

B) 13

C) 14

D) 15

E) 16

3.  $y = ax^2 - 2x$

$x = t^3 - 3t$  olarak veriliyor.

$\frac{dy}{dt}$ 'nin  $t = 2$  için değeri 90 olduğuna göre  $a$  kaçtır?

A) -3

B) -2

C) 0

D) 2

E) 3

4.  $y = (2x^2 + 1)^3$

$x = (2t^2 - 1)^3$  olarak veriliyor.

$\frac{dy}{dt}$  ifadesinin  $t = 1$  için sonucu kaçtır?

A) 1296

B) 1196

C) 1096

D) 1080

E) 996

5.  $f(x) = 3x^2 + 2$ ,  $g(x) = 4x + 1$  fonksiyonları veriliyor. Buna göre  $(f \circ g)'(x)$  değeri kaçtır?

A) 46

B) 48

C) 50

D) 52

E) 54

6.  $y = u^2 + u$

$u = x^2 - x + 1$

olduğuna göre,  $\frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{dx}$ 'in  $x$  türünden değeri

aşağıdakilerden hangisidir?

A)  $(2x - 2)(x^2 - x + 2)$

B)  $(2x + 1)(x^2 - x + 2)$

C)  $(x + 1)(2x^2 - 2x + 4)$

D)  $(2x - 1)^2(2x^2 - 2x + 3)$

E)  $(x - 1)(2x + 1)$

7.  $f(x^2 + x + 1) = x^2 - 2x + 3$   
ise  $f'(1)$  kaçtır?  
A) 0 B) -1 C) -2 D) -3 E) -4

8.  $f(2x + 1).g(3x - 1) = 2x$  ve  
 $g(2) = 3, f(3) = 2$   
olduğuna göre  $f'(3) + g'(2)$  kaçtır?  
A)  $\frac{1}{2}$  B)  $\frac{1}{3}$  C)  $\frac{1}{4}$  D)  $\frac{1}{5}$  E)  $\frac{1}{6}$

9.  $(f \circ g)(x^2 + 1) = x^3 - x + 1$  ve  $g(5) = g'(5) = 4$   
olduğuna göre  $f'(4)$  değeri kaç olabilir?  
A)  $\frac{7}{16}$  B)  $\frac{9}{16}$  C)  $\frac{11}{16}$  D)  $\frac{13}{16}$  E)  $\frac{15}{16}$

10.  $f(x) = (x^3 - x^2 + 2)^2$   
olduğuna göre  $f''(x)$  aşağıdakilerden hangisidir?  
A)  $30x^4 - 40x^3 + 12x^2 + 24x - 8$   
B)  $30x^4 + 40x^3 - 12x^2 - 24x + 8$   
C)  $40x^3 + 12x^2 + 24x + 8$   
D)  $40x^3 - 12x^2 - 24x - 8$   
E)  $12x^2 + 24x + 8$

11.  $f(x) = (x + 1)^3.(x^2 + 1)$   
olduğuna göre  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$  değeri kaçtır?  
A) 252 B) 243 C) 216 D) 189 E) 162

12.  $f(x) = \frac{x}{3x+1}$   
olduğuna göre  $f''(0)$  değeri kaçtır?  
A) -6 B) -8 C) -10 D) -12 E) -14

1.  $f(x) = x^2 + x$ ,  $g(x) = 2x - 1$  olarak veriliyor.

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & , x < 1 \\ g(x) & , x \geq 1 \end{cases}$$

olduğuna göre  $h'(1)$  kaçtır?

- A) Yok B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & , x < 1 \\ x^2 - x + 3 & , x = 1 \\ 4x - 1 & , x > 1 \end{cases}$$

olarak veriliyor.

Buna göre  $f'(1^+) + f'(1^-)$  kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & , x < 2 \\ 9 & , x = 2 \\ 5x - 1 & , x > 2 \end{cases}$$

olarak verilen fonksiyon için  $x = 2$  noktasındaki türevinin değeri kaçtır?

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) Yok

4.  $f(x) = \begin{cases} 2 - mx^2 & , x < 1 \\ nx + 15 & , x \geq 1 \end{cases}$

fonksiyonu her  $x \in \mathbb{R}$  için türevli olduğuna göre  $m.n$  kaçtır?

- A) -286 B) -299 C) -312 D) -325 E) -338

5.

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 1 & , x < 1 \\ 3x^2 + 1 & , 1 \leq x < 2 \\ 7x - 1 & , x \geq 2 \end{cases}$$

olarak veriliyor.

Buna göre

- I.  $f'(1^+) = 6$   
 II.  $f'(1^-) = 5$   
 III.  $f'(x)$ ,  $x = 2$ 'de süreksizdir.  
 IV.  $f'(1)$  yoktur.  
 V.  $f'(-1)$  yoktur.

yargılarından kaç tanesi doğrudur?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6.

$f(x) = |2x - 4|$  olarak veriliyor.

Buna göre

- I.  $f'(2) = 0$ 'dir.  
 II.  $f'(2) = 2$ 'dir.  
 III.  $f'(2)$  yoktur.

yargılarından hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III  
 D) I ve II E) II ve III

7.  $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$  olarak verilsin.  
Buna göre  $f'(-1)$  değeri varsa kaçtır?  
A) Yok B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

8.  $f(x) = 2x \cdot |x - x^2|$   
olduğuna göre  $f'(-1)$  kaçtır?  
A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

9.  $f(x) = |x - 3| + 2x^2$  olarak veriliyor.  
 $f'(3^-)$  ifadesinin değeri kaçtır?  
A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

10.  $f(x) = \frac{3|x-1|}{|x+1|}$   
fonksiyonunun türevsiz olduğu  $x$  değerleri toplamı kaçtır?  
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

11.  $f(x) = \frac{x+1}{3x^2-7x+4}$   
fonksiyonunun türevsiz olduğu  $x$  değerleri toplamı kaçtır?  
A) 2 B)  $\frac{7}{3}$  C)  $\frac{8}{3}$  D) 3 E)  $\frac{10}{3}$

12.  $f(x) = |x^2 + ax + 1|$   
fonksiyonu her  $x \in \mathbb{R}$  için türevli olduğuna göre  $a$  nın en geniş aralığı aşağıdakilerden hangisidir?  
A) (-1, 3) B) (-1, 1) C) [-2, 2]  
D) (-2, 2) E) [-1, 1]

1. Hareket denklemi  $s(t) = 4t^2 - 3t + 1$  olan cismin  $t = 1$  ve  $t = 3$  saniyelerdeki anlık hızları toplamı kaç m/sn'dir?

A) 15 B) 18 C) 21 D) 26 E) 27

2. Yol denklemi

$$x(t) = 2t^3 - t^2 + 5t$$

olan bir hareketlinin 2. saniyedeki ivmesi kaç  $m/sn^2$ 'dir?

A) 22 B) 24 C) 26 D) 27 E) 28

3.  $f(x) = (x + 2)(x - 1)$  fonksiyonuna  $x = \frac{1}{2}$  apsisli noktasından çizilen teğetin eğimi kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4.  $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$

fonksiyonuna  $x = 1$  apsisli noktasından çizilen teğetin eğimi kaçtır?

A)  $-\frac{1}{36}$  B)  $-\frac{1}{18}$  C)  $-\frac{2}{18}$   
D)  $-\frac{5}{36}$  E)  $-\frac{7}{36}$

5.  $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

fonksiyonuna  $x = 0$  apsisli noktasından çizilen teğetin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A)  $7x - 9y + 3 = 0$   
B)  $9x - 7y - 3 = 0$   
C)  $9x + 7y + 3 = 0$   
D)  $7x + 9y + 3 = 0$   
E)  $7x + 9y - 3 = 0$

6.  $f(x) = x^2 + 4x - 4$  eğrisine  $x = -\frac{5}{2}$  apsisli noktadan çizilen teğetin

$x$  eksenine ile yaptığı pozitif yönlü açısı kaç derecedir?

A) 45 B) 60 C) 90 D) 135 E) 150

7.  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$  eğrisi  
 $y = -3x + 1$  doğrusu veriliyor.  
 Bu eğri ile doğrunun birbirine birinci bölgede  
 teğet oldukları noktanın apsisi kaçtır?  
 A) -1 B)  $-\frac{4}{3}$  C)  $-\frac{5}{3}$  D) -2 E)  $-\frac{7}{3}$

8.  $2y - x + 1 = 0$  doğrusuna dik olan  $ax + by + c = 0$  doğ-  
 rusu,  
 $f(x) = x^2 - 6x + 4$  fonksiyonuna teğet olduğuna  
 göre  $c$  kaçtır?  
 A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

9.  $f(x) = 4x^2 + x + 2$  fonksiyonun,  
 $y = 9x + 1$  doğrusuna paralel teğetinin  $f(x)$ 'i  
 kestiği nokta aşağıdakilerden hangisidir?  
 A) (6,2) B) (7,1) C) (1,7)  
 D) (2,7) E) (3,5)

10.  $y = 2x^2 + 4x$   
 eğrisine  $x=1$  apsisi noktadan çizilen teğet doğ-  
 runun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?  
 A)  $y = 8x + 2$  B)  $y = 8x + 1$  C)  $y = 8x - 1$   
 D)  $y = 8x - 2$  E)  $y = 8x$

11.  $y = -x^2 + 3x$  fonksiyonu veriliyor.  
 Üzerindeki  $A(1,b)$  noktasından çizilen teğetin  
 denklemi aşağıdakilerden hangisidir?  
 A)  $y = -x + 1$  B)  $y = 2x + 3$  C)  $y = x - 1$   
 D)  $y = x + 1$  E)  $y = x + 2$

12.  $y = x^3 - 3x + 2$  eğrisinin üzerindeki  $(-2, 0)$  nokta-  
 sından çizilen teğeti, eğriyi başka bir B noktasın-  
 da kesiyor.  
 Bu B noktasının ordinatı kaçtır?  
 A) 52 B) 54 C) 56 D) 58 E) 60



1.  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$  fonksiyonuna  $x = 0$  apsisi noktasından çizilen teğet  $x$  eksenine pozitif yönde  $135^\circ$ lik açı yapmaktadır.  $f$  fonksiyonunun  $x = 1$  apsisi noktasından çizilen teğet ise  $x$  eksenine pozitif yönde  $0^\circ$ lik açı yapmaktadır.

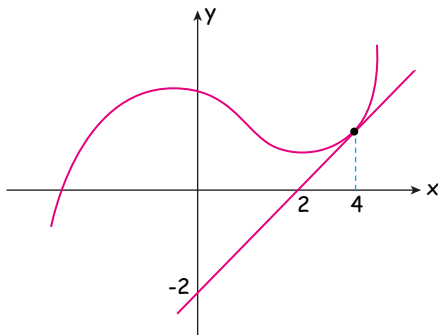
Buna göre  $a + b$  kaçtır?

- A) 2    B) 1    C) 0    C) -1    E) -2

2.  $y = x^2 + 5$  eğrisinin  $y = 2x - 5$  doğrusuna en yakın noktası aşağıdakilerden hangisidir?

- A) (1, 6)    B) (1, 5)    C) (2, 7)  
D) (2, 6)    E) (1, 7)

3.

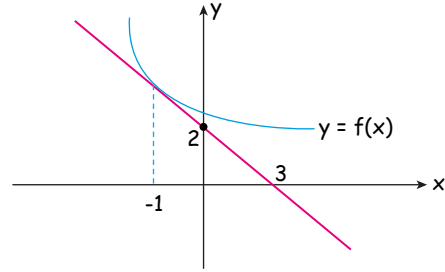


Yukarıda  $y = f(x)$  fonksiyonunun grafiği ve bu grafiğe  $x = 4$  apsisi noktadan çizilen teğetin grafiği verilmiştir.

$g(x) = x \cdot f(x)$  fonksiyonunun  $x = 4$  apsisi noktasındaki teğetin eğimi kaçtır?

- A) 6    B) 8    C) 10    D) 12    E) 14

4.

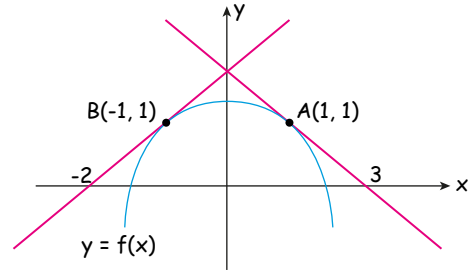


Yukarıda  $y = f(x)$  fonksiyonunun ve  $x = -1$  noktasındaki teğetin grafiği verilmiştir.

$g(x) = 3x \cdot f(2x - 1)$  eğrisinin  $x = 0$  apsisi noktasındaki teğetin denklemini  $x$  eksenini hangi noktada kesmektedir?

- A) (0, -1)    B) (-1, 8/3)    C) (1, 6)  
D) (0, 0)    E) (1, 1)

5.

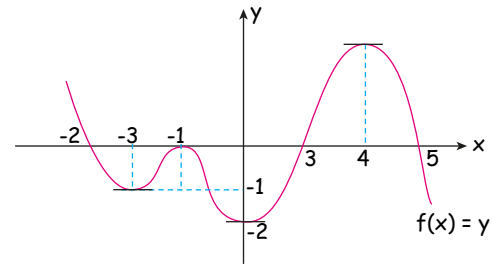


Yukarıda  $y = f(x)$  fonksiyonunun ve bu fonksiyonun A ve B noktalarındaki teğet doğrularının grafikleri verilmiştir. Bu teğet doğruları sırasıyla  $x$  eksenini (3, 0) ve (-2, 0) noktalarında kesmektedir.

$g(x) = (f \circ f)(x)$  olarak tanımlandığına göre  $g'(-1)$  kaçtır?

- A) -1    B)  $-\frac{1}{2}$     C) -2    D)  $-\frac{3}{2}$     E) -3

6.

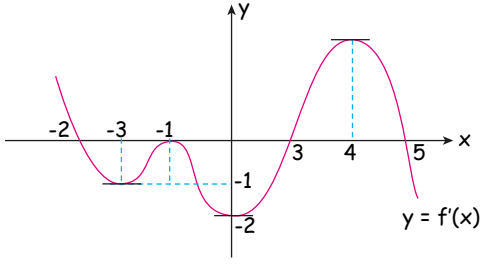


Yukarıda  $f(x) = y$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre  $f(x)$  fonksiyonunun yerel max noktalarının apsileri toplamı kaçtır?

- A) 1    B) 2    C) 3    D) 4    E) 5

7.

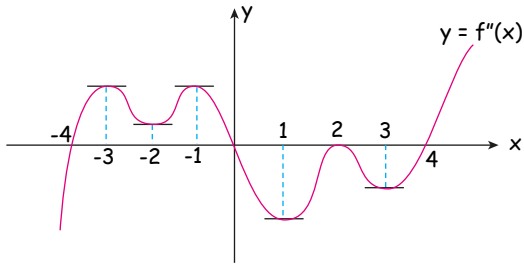


Yukarıda  $y = f(x)$  fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.

Buna göre  $f(x)$  fonksiyonunun yerel max noktalarının apsileri toplamı kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

8.

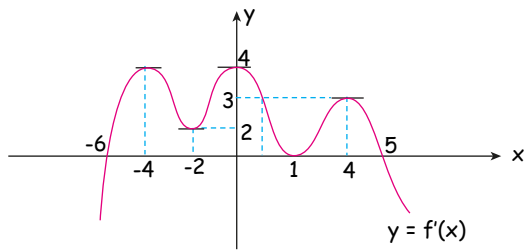


Yukarıda bir  $f(x)$  fonksiyonunun ikinci türevinin grafiği verilmiştir.

Buna göre  $f'(x)$  fonksiyonunun yerel max ve yerel min noktalarının apsileri toplamı kaçtır?

- A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

9.



Yukarıda bir  $f(x)$  fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.

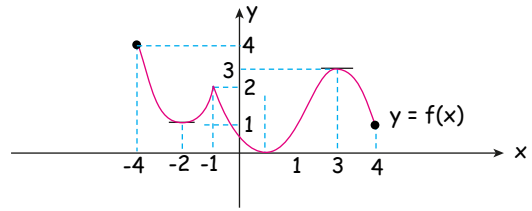
Bu grafiğe göre;

- I.  $f$  fonksiyonu (1,4) aralığında artar.  
 II.  $f$  fonksiyonu (0,1) aralığında azalır.  
 III.  $f$  fonksiyonunun ekstremum noktalarının apsileri  $\{-4, -2, 0, 1, 4\}$  kümesinin elemanlarıdır.

Yargılarından hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III  
 D) I ve III E) II ve III

10.



Yukarıda  $[-4, 4]$  aralığında tanımlı  $y = f(x)$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

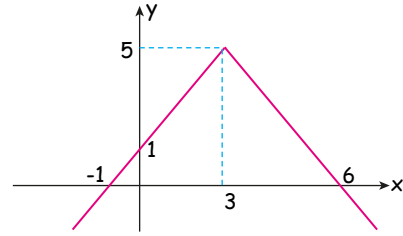
Buna göre;

- I.  $f$  fonksiyonunun yerel minimum noktalarından biri  $(-2, 1)$ 'dir.  
 II.  $f$  fonksiyonunun yerel max noktalarından biri  $(-1, 2)$ 'dir.  
 III.  $f$  fonksiyonu daima artandır.

Yargılarından hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız III C) I ve II  
 D) I ve III E) I, II ve III

11.

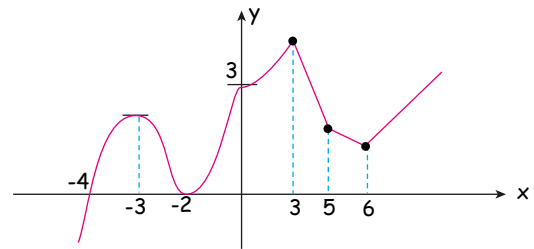


Yukarıda  $y = f(x)$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$f'(3^+) + f'(3^-)$  toplamının değeri kaçtır?

- A)  $-\frac{2}{3}$  B)  $-\frac{7}{12}$  C)  $-\frac{1}{2}$  D)  $-\frac{5}{12}$  E)  $-\frac{1}{3}$

12.



Yukarıda  $y = f(x)$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

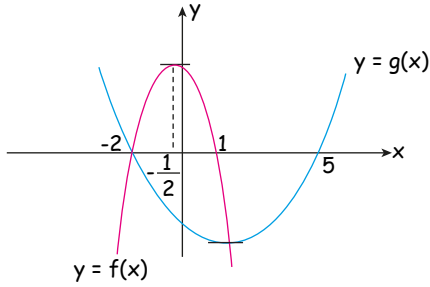
Bu verilen değerlere göre ekstremum nokta olduğu halde türevi olmayan kaç nokta vardır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

1.  $f(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - 2x + 3$  fonksiyonunun aşağıdaki aralıkların hangisinde azalandır?

A)  $x \leq -1$       B)  $x \geq 2$       C)  $-3 \leq x \leq 2$   
D)  $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$       E)  $-1 \leq x \leq \frac{2}{3}$

2.



Yukarıdaki  $f$  ve  $g$  fonksiyonları ile tanımlanan ve  $h'(x) = f'(x) \cdot g(x)$  koşulunu sağlayan  $y = h(x)$  fonksiyonu aşağıdaki aralıklardan hangisinde kesinlikle artandır?

A)  $(\infty, -2] \cup [-\frac{1}{2}, 5]$   
B)  $(-\infty, -\frac{1}{2}]$   
C)  $[\frac{1}{2}, 5]$   
D)  $[-2, -\frac{1}{2}] \cup [5, \infty)$   
E)  $[-2, 5]$

3.  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  fonksiyonu veriliyor.  $y = f(x)$  fonksiyonunun azalan olduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A)  $[0, \infty)$       B)  $(-\infty, 0]$       C)  $[0, 1)$   
D)  $(-1, 1]$       E)  $[-2, 2]$

4.  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$  fonksiyonu veriliyor. Buna göre  $f'(x)$  fonksiyonunun artan olduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A)  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$       B)  $(-\infty, -\frac{1}{2}]$       C)  $[-\frac{1}{2}, \infty)$   
D)  $[0, \infty)$       E)  $(-\infty, 0]$

5.  $y = f(x)$  fonksiyonu  $(1, 3)$  aralığında negatif tanımlı ve azalan bir fonksiyondur.

Buna göre

$$Y = \frac{1}{f(x)}$$

$$y = f^2(x)$$

$$y = f(x^2)$$

$$Y = \frac{1}{f^2(x)}$$

$$y = f(f(x))$$

fonksiyonlarından kaç tanesi aynı aralıkta artan fonksiyondur?

A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 5

6.  $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + 4$  fonksiyonunun daima artan olmasını sağlayan  $a$  gerçekte sayısının aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A)  $a > 1$       B)  $a \geq 1$       C)  $a < 0$   
D)  $a \geq 3$       E)  $a \leq \frac{1}{3}$

7.  $f(x) = \frac{x+a}{3x-1}$  fonksiyonunun daima artan olmasını sağlayan  $a$  gerçekte sayısının değer aralığı aşağıdakilerden hangisi olmalıdır?
- A)  $a \leq -\frac{1}{3}$       B)  $a \geq \frac{-1}{3}$       C)  $a \leq 1$   
 D)  $a \geq 1$       E)  $a \leq 0$

8.  $f(x) = -x^3 + mx^2 - 6x + 5$  fonksiyonu birebir fonksiyondur. Buna göre  $m$  kaç tane tam sayı değeri alır?
- A) 8      B) 9      C) 10      D) 11      E) 12

9.  $f(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 3$  fonksiyonu veriliyor. Bu fonksiyonla ilgili aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
- A)  $[2, \infty]$  aralığında azalandır.  
 B)  $(-\infty, -\frac{1}{2}]$  aralığında azalandır.  
 C)  $(-\frac{1}{2}, 2]$  aralığında artandır.  
 D)  $(-\frac{1}{2}, 2]$  aralığında azalandır.  
 E)  $(2, f(2))$  noktası yerel maksimum noktasıdır.

10.  $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x < 1 \\ x+2, & x \geq 1 \end{cases}$  fonksiyonunun artan olduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?
- A)  $[-1, 2]$       B)  $[-1, 1]$       C)  $[1, \infty)$   
 D)  $(-\infty, 1]$       E)  $[-2, 1]$

11. Yıllar içinde enflasyon oranının zamana bağlı değişimi  $e(t)$  fonksiyonu ile modellenmektedir.
- $$e(t) = \frac{1,6 \cdot t}{t^2 + 16}, 0 \leq t \leq 10$$
- Buna göre 10 yıllık süreçte enflasyonun azaldığı zaman aralığı aşağıdakilerden hangisidir?
- A)  $[0, 4]$       B)  $[0, 6]$       C)  $[1, 6]$   
 D)  $[4, 10]$       E)  $[0, 10]$

12.  $f(x) = \frac{2x+2}{x^2-x-2}$  fonksiyonu veriliyor. Buna göre  $f(x)$  in artan olduğu en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?
- A)  $(-\infty, 2]$       B)  $[-2, \infty)$       C)  $(-2, \infty)$   
 D)  $\mathbb{R}$       E)  $\emptyset$

1.  $f(x) = \frac{5}{8}x^3 + 5x^2 + 7$

fonksiyonunun ekstremum noktalarının ordinatları toplamı kaçtır?

- A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

2. •  $f(x) = x^5$

•  $g(x) = 2x^3$

•  $h(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3}$

•  $t(x) = 7\sqrt[3]{x^4}$

•  $f(x) = 5x^{-2}$

Yukarıdaki fonksiyonların en geniş tanım kümelerinde kaç tanesinin yerel ekstremum noktası vardır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.  $f(x) = \frac{2ax+3}{x^2+2x}$  fonksiyonunun  $x = 1$  apsisli noktasında ekstremum noktası olduğuna göre,  $a$  kaçtır?

- A)  $-\frac{4}{3}$  B) -6 C) 0 D) 6 E)  $\frac{4}{3}$

4.  $f(x) = ax^3 + \frac{x^2}{2} + 2bx - \frac{1}{2}$

fonksiyonunun yerel maksimum noktası  $A(-1, 1)$  olduğuna göre, yerel minimum noktasının apsisi kaçtır?

- A)  $-\frac{2}{3}$  B)  $-\frac{1}{3}$  C) 0 D)  $\frac{1}{3}$  E)  $\frac{2}{3}$

5.  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

fonksiyonunun ekstremum noktalarının apsisi -1 ve 4 olduğuna göre  $a$  kaçtır?

- A)  $-\frac{9}{2}$  B)  $-\frac{1}{2}$  C) 0 D)  $\frac{1}{2}$  E)  $\frac{9}{2}$

6.  $f(x) = x^3 - 2ax^2 + 12x + c$  fonksiyonu veriliyor.

$f'(x)$  fonksiyonunun yerel minimum değeri 0 olduğuna göre,  $a$ 'nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

7.  $f(x) = 2x + \frac{3}{2x+a}$   
fonksiyonunun ekstremum noktalarının apsileri toplamı 3 olduğuna göre,  $a$  kaçtır?

A) -6 B) -5 C) -4 D) -3 E) -2

8.  $f(x) = x^3 - 27x + 4$   
fonksiyonunun  $[1, 4]$  aralığındaki mutlak maksimum değeri, mutlak minimum değerinden kaç fazladır?

A) 27 B) 28 C) 29 D) 30 E) 31

9.  $f(x) = -3x^3 + m^2x + 2$   
fonksiyonunun yerel maksimum değeri 8 olduğuna göre,  $m$  değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10.  $f(x) = x^3 + ax^2 + 4x + 1$   
fonksiyonu veriliyor.

$f(x)$  fonksiyonunun ekstremum noktası olmadığına göre,  $a$  nın alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) -3 E) -2

11.

$x$		$a$		$b$		$c$	
$f'(x)$	+	○	+	○	-	○	+

Yukarıda  $f$  fonksiyonunun türevinin işaret tablosu verilmiştir.

Buna göre  $f$  fonksiyonu ile ilgili aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A)  $x = a$  apsisli noktada yerel ekstremum noktası vardır.  
B)  $[b, c]$  aralığında fonksiyon artandır.  
C)  $[a, b]$  aralığında  $f$  fonksiyonu azalandır.  
D)  $x = b$  apsisli nokta,  $f$  fonksiyonunun yerel maksimum noktasıdır.  
E)  $x = c$  apsisli nokta,  $f'$  fonksiyonunun yerel minimum noktasıdır.

12.  $h(x) = \ln f(x)$  olmak üzere,  
 $h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$  dir.

Buna göre,

$$g(x) = \ln(x^3 - 6x^2 + 1)$$

fonksiyonunun yerel maksimum değeri kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

1.  $f(x) = 2x^3 + ax^2 + 6x + 3$  fonksiyonu veriliyor.  $f(x)$  fonksiyonunun  $A(1, b)$  noktasında yerel minimum değeri olduğuna göre,  $a + b$  değeri kaçtır?

A) -1 B) -2 C) -3 D) 1 E) 2

2.  $f(x) = \frac{x^2 + mx + 2}{x + m}$  fonksiyonu veriliyor.  $f(x)$ 'in ekstremum noktalarının apsileri  $x_1$  ve  $x_2$  dir.

$x_1 = 2x_2$  olduğuna göre,  $m$ 'nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

3.  $f(x) = (x + 1)^2 \cdot (x + 2)^3 \cdot (x + 3)^4$  eğrisinin ekstremum noktalarının apsileri toplamı kaçtır?

A) -36 B) -37 C) -38 D) -39 E) -40

4.  $f(x) = 4x - \frac{x^3}{3}$  eğrisine yerel maksimum noktasından çizilen teğet, eğriyi başka bir  $A$  noktasında kesiyor.

Buna göre  $A$  noktasının apsisi kaçtır?

A) 4 B) 2 C) -4 D) -6 E) -8

5.  $f(x) = ax^2 + bx + c$  olmak üzere;

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - 5}{x + 1} = 0 \text{ ve } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - 23}{2x - 4} = 0$$

olduğuna göre,  $f$  fonksiyonunun ekstremum noktalarının apsileri toplamı kaçtır?

A)  $-\frac{5}{9}$  B)  $-\frac{4}{9}$  C) 1 D)  $\frac{4}{5}$  E)  $\frac{5}{5}$

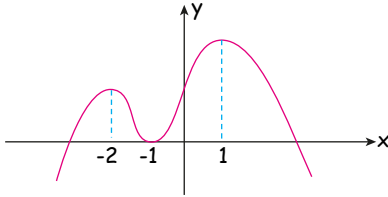
6.  $f(x) = x(x + a)^2$

fonksiyonunun  $x = -3$  apsisi noktası yerel maksimum noktası olduğuna göre  $a$ 'nın en küçük değeri kaçtır ?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

7.  $f(x) = 2x^3 + ax^2$  fonksiyonunun  $x = -\frac{1}{3}$  apsisli noktası yerel ekstremum noktası olduğuna göre  $a$  değeri kaçtır?  
A) 5      B) 4      C) 3      D) 2      E) 1

8.



Yukarıda grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonunun türevinin denklemini  $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2c$  olduğuna göre  $a + b + c$  kaçtır?

- A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 5

9.  $f(x) = 2x^2 - 6x$  parabolünün üzerindeki her noktanın koordinatları çarpımını veren fonksiyon  $g(x)$  olmak üzere,  $g(x)$  fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarının apsileri toplamı kaçtır?  
A) -2      B) -1      C) 0      D) 1      E) 2

10. Gerçek sayılar kümesinde tanımlı ve sürekli  $f$  fonksiyonunun türevi aşağıda verilmiştir.

$$f'(x) = \begin{cases} 3, & x \geq 1 \\ -2, & x < 1 \end{cases}$$

Buna göre,

- I.  $f$  fonksiyonu sadece  $[1, 3]$  aralığında artandır.  
II.  $f$  fonksiyonu  $[-1, 0]$  aralığında azalandır.  
III.  $f$  fonksiyonunun  $x = 1$  apsisli noktasında yerel minimum değeri vardır.

ifadelerinden hangisi ya da hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I      B) Yalnız II      C) II ve III  
D) I ve III      E) I, II ve III

11.  $f'(x) = (x^3 - 16x)(x^3 - 9x)$  türev fonksiyonu veriliyor.

Buna göre  $f$  fonksiyonunun ekstremum noktalarının apsilerinin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A)  $\{-4, -3, 0, 3, 4\}$       B)  $\{-4, -3, 3, 4\}$   
C)  $\{0\}$       D)  $\{0, 3, 4\}$   
E)  $\{-4, -3, 0\}$

12.  $f(x) = \frac{x^5}{5} - x + 12$  fonksiyonunun grafiği  $x$  eksenini kaç noktada keser?

- A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 5



1. Toplamları 15 olan iki gerçel sayının çarpımı en çok kaç olur?

A)  $\frac{225}{4}$  B)  $\frac{15}{2}$  C) 56 D) 42 E) 14

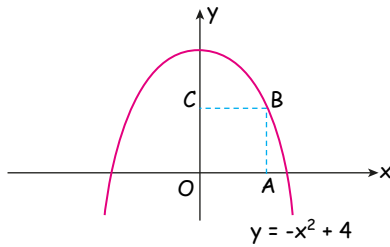
2. İki muslukta birincisinden 1 saatte  $x$  lt, ikincisinden 1 saatte  $y$  lt su akmaktadır. Birinci musluk  $3y$  saat açık ve 2. musluk  $3x$  saat açık tutuluyor. Birinci muslukta 2 saatte akan su miktarı ile ikinci muslukta 3 saatte akan su miktarının toplamı 24 lt olduğuna göre, biriken su miktarının en fazla olabilmesi için iki muslukta bir saatte akan su miktarının kaç lt olması gerekir?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

3.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 5x + 7$  fonksiyonunun grafiği üzerindeki bir  $A(a, b)$  noktasının koordinatları toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) -2 B) -3 C) -4 D) -5 E) -6

4.



Yukarıda  $y = -x^2 + 4$  parabolü ve B köşesi parabolün üzerinde olan OABC dikdörtgeni çizilmiştir. Bu OABC dikdörtgenlerinden alanı en büyük olanının alanı kaç birimkaredir?

A)  $\frac{33}{13}$  B)  $9\sqrt{3}$  C) 16 D)  $\frac{16\sqrt{3}}{9}$  E)  $16\sqrt{3}$

5.



Bir evin krokisi yukarıda verilmiştir. Elindeki 8 m balkon demiri ile balkonun üç tarafını çevirecek olan Ahmet'in maksimum alanlı balkonu en fazla kaç metrekaare olur?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

ÇİTA YAYINLARI

6. Evine hacmi 96 metreküp olan üstü açık kare prizma şeklinde bir sandık yaptıracak olan Hatice Hanım bir dolap ustası ile aşağıdaki konuşmayı yaşamıştır.

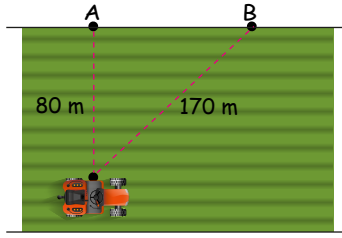
- Usta: Bu sandığın taban yüzeyi metrekaare başına 3 TL'ye, yan yüzeyleri ise metrekaare başına 1 TL'ye mal olur. İşçilik olarak da 200 TL alırım.
- Hatice Hanım: Maliyeti minimum tutarsanız size istediğiniz işçilik ücretini ödeyebilirim.
- Usta: Tamamdır. Maliyeti minimum tutmak için ayarlamalar yapacağım.

Bu durumda Hatice Hanım'ın ustaya ödeyeceği ücret en az kaç liradır?

A) 144 B) 344 C) 488 D) 576 E) 672



1.

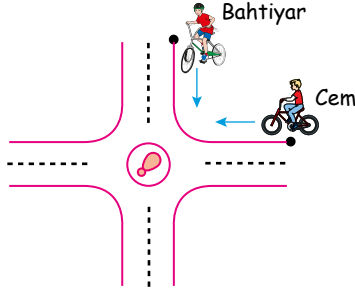


Yukarıda bir tarlanın içindeki traktör modellenmiştir. Bu traktörün mazotu bitmek üzere olduğu için tarlanın dışındaki B noktasına en kısa sürede varması gerekmektedir. Bu traktör tarlada 6 m/dk, A ile B arasındaki asfalt yolda 10 m/dk hızla hareket etmektedir.

Bu traktörün asfalt yola uzaklığı 80 m ve B noktasına uzaklığı 170 m olduğuna göre traktörün asfalt yola ilk çıktığı yerin B noktasına uzaklığı kaç metredir?

- A) 85 B) 90 C) 95 D) 100 E) 105

2.



Yukarıda bir kavşak gösterilmiştir. B noktasında bulunan Bahtiyar'ın kavşağın ortasında bulunan O noktasına uzaklığı 400 metre, C noktasında bulunan Cem'in O noktasına uzaklığı 440 m'dir. Bahtiyar ve Cem bisikletleri ile kavşağa doğru sırasıyla 6 m/dk ve 10 m/dk hızla yaklaşmaktadır. Cem kavşağı geçmiştir.

Buna göre, bu iki arkadaşın aralarındaki uzaklık en az olduğu anda O noktasına uzaklıkları toplamı kaçtır?

(Gittikleri yollar birbirine dik alınacaktır.)

- A) 160 B) 180 C) 200 D) 220 E) 240

3.

Tanesi 15 TL'den üretilen bir kalem 90 TL'den satılırsa 1260 adet satılabilir.

Bu kalemin fiyatında yapılan her 3 TL'lik indirimde 60 adet fazla satış yapıldığı tespit edilmiştir.

Bu kalemin satışından en fazla kaç TL kar edilmiştir?

- A) 45360 B) 45900 C) 95220  
D) 47850 E) 48080

4.

$$f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 6x - 1$$

eğrisine çizilen teğetlerden eğimi en az olanın değme noktası aşağıdakilerden hangisidir?

- A) (-1, 0) B) (1, 0) C) (0, 1)  
D) (1, -1) E) (-1, 1)

5.

$$|AD| = |DC| = |CB| = 8 \text{ cm}, [DC] // [AB]$$

olacak şekilde bir ABCD yamuğu veriliyor.

Bu yamuğun alanının maksimum olması için  $|AB| = x$  kaç cm olmalıdır?

- A) 16 B) 18 C) 19 D) 20 E) 22

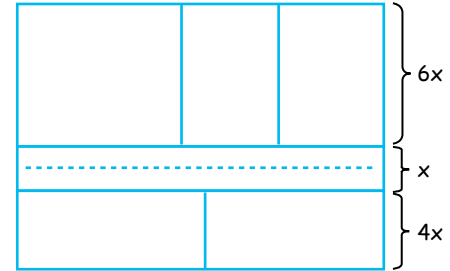
6.

$$ax^2 - (a - 1)x + 2a = 0$$

ikinci dereceden denklemin köklerinin karelerinin toplamının minimum olması için a gerçekte sayısı kaç olmalıdır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

7.



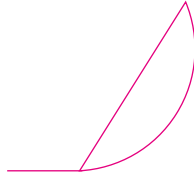
Dikdörtgen şeklindeki arsasının içinden yol geçecek olan Mehmet Bey'in arsası yukarıdaki gibi bölünmek isteniyor. Bu arsının çevresi 4400 metredir. Mehmet Bey'e belediye yetkilileri geçecek yolun en büyük alanlı yol olacağını söylemişler.

Buna göre Mehmet Bey'in arsasından kalan kısmı kaç metre kare olur?

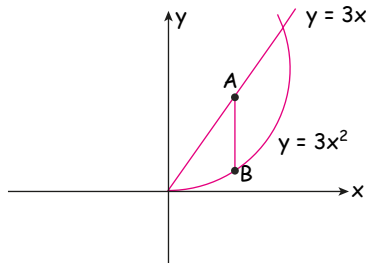
- A) 1.111.000 B) 1.110.000 C) 1.100.000  
D) 1.000.000 E) 1.010.000

8.  $y = -\sqrt{4x-6}$   
parabolü üzerinde alınan bir noktanın koordinatlarının kareleri toplamı en küçük kaç olur?  
A) -6 B) -7 C) -8 D) -9 E) -10

9.



Yukarıdaki şekilde bir çukura yapılacak merdiven modellenmiştir. Bu merdiven ve çukur matematiksel olarak düzenlenerek;

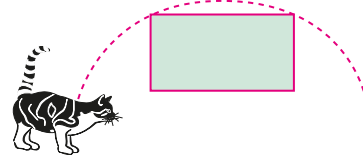


Yukarıdaki gibi fonksiyonlar şekline getirilmiştir. Çukur ile merdiven arasındaki y eksenine paralel [AB] doğru parçaları için en uzun parçanın uzunluğu grafik üzerinde kaç birim olabilir?

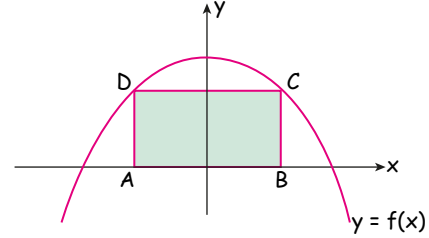
- A)  $\frac{1}{4}$  B)  $\frac{2}{3}$  C)  $\frac{3}{4}$  D) 1 E)  $\frac{5}{4}$

10. Elindeki A4 şeklindeki kağıttan maksimum hacimli bir kare prizma yapmak isteyen Duru Melek, prizmanın taban alanını kaç  $\text{cm}^2$  olarak belirlemelidir? (A4 boyutları:  $210 \times 297 \text{ cm}^2$ )  
A) 10050 B) 10195 C) 10295  
D) 10395 E) 10497

11.



Yukarıda eşyaların üzerinden zıplamayı çok seven bir kedi olan Lokum'un yaptığı bir sıçrayış modellenmiştir. Lokum'un bu sıçrayışının bir fonksiyon olarak parabole karşılık geldiği düşünülürse;



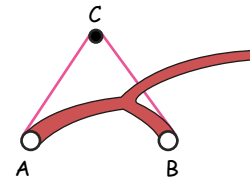
yukarıdaki gibi bir fonksiyon ortaya çıkmaktadır. ABCD dikdörtgeni ise üzerinde atladığı sandık olmaktadır.

$f(x) = p - 6x^2$  ve ABCD dikdörtgeninin alanı en büyük değeri aldığı anda  $|BC| = 48 \text{ cm}$  oluyorsa p kaç olmalıdır?

- A) 64 B) 70 C) 72 D) 78 E) 80

ÇİTA YAYINLARI

12.



Yukarıda bir sapan resmedilmiştir. C noktası lastiğin en çok uzayarak CAB ikizkenar üçgenini oluşturduğu yerdir. P noktası CAB üçgeninin C köşesinden geçen yükseklik üzerinde bir nokta olmak üzere, en iyi atışın  $|PA| + |PB| + |PC|$  toplamı en küçük değerini aldığı anda yapıldığı tespit edilmiştir. CAB üçgeninin C köşesinden geçen yüksekliğin [AB]'yi kestiği nokta H olmak üzere  $|CH| = 3 \text{ cm}$ ,  $|AH| = |HB| = 6 \text{ cm}$  olduğuna göre, en iyi atışı yapmak isteyen Yiğit'in  $|PC|$ 'yi kaç cm alması gerekir?

- A)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  B)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  C)  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$  D)  $\sqrt{3}$  E)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$



Sen Çöz

1. a) Doğru  
b) Doğru  
c) Doğru  
d) Yanlış  
e) Doğru
2. 2      3. 0
4. a) 0      d) Yok      5. -4      6. {b, c, d}  
b) 2      e) 4  
c) 3      f) 0
7. a) 13      d)  $\frac{1}{3}$       8. a) var      d) yok  
b)  $\frac{5}{3}$       e) 16      b) var  
c)  $\sqrt{13}$       f) 2      c) var
9. 5      10. 2      11. 10
12. a) 16      13. 3      14. 2  
b) -2  
c) yok
15. -4      16. 13      17. {5}
18. 2      19. a) 3      d) 50      20. -4  
b) 0      e) 0  
c)  $\frac{1}{6}$       f) 0
21. I, III, IV      22. a) y  
b)  $-\frac{1}{4\sqrt{x}}$       23. 4
24.  $\frac{2}{3}$       25.  $x^2$       26. Sürekli  
değil
27. [-4, 5]      28. a) Sürekli  
b) Süreksiz  
c) Sürekli      29. I, III, IV,  
V, VI, VII

30. 20      31. {-5, -4, ..., 5}      32. 3
33. (-4, 4]      34. -8
35. (-4, 4)      36. 6
37.  $2x + 4$       38.  $\frac{-9}{(5x-4)^2}$
39. a) 2      e)  $-5x^{-6}$   
b)  $12x^2$       f)  $-\frac{6}{x^2}$   
c)  $6a$       g)  $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$   
d)  $6xb^2$       h)  $-\frac{12}{x^5\sqrt{x^3}}$
40.  $\frac{b}{a}x^{\frac{b-a}{a}}$       41. -6!

ÇİTA YAYINLARI

42.  $-\frac{15}{8}$       42. 1
44. 108      45. a)  $5(x^2 - 2x + 1)^4 \cdot (2x - 2)$   
b)  $(x^2 - 5) \cdot (5x^2 + 16x - 5)$
46. -4      47. -3
48.  $\frac{1}{9}$       49.  $-2^{50} \cdot 50!$
50.  $32\pi$  cm / sn      51.  $\frac{9}{4}$  m/dk
52. -3      53. {-2, 2, 3, 9}
- 54.
- |       |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| x     | -4  | -3  | -2  | -1  | 0   | 1   | 2   | 3   |
| f(x)  | 0   | var | 1   | 3   | var | 2   | 1   | 0   |
| f'(x) | var | var | yok | yok | var | yok | yok | var |

## CEVAP ANAHTARI

55.  $-\frac{1}{2}$

56.  $\frac{1}{8}$

57. Yok

58. -10

59. a) Türev var  
b) Türev yok  
c) Türev yok

60.  $\{0, 1\}$

61.  $\{-2, 0\}$

62. 6

63. 5

64. 64

65. 0

66.  $\frac{7}{2}$

67.  $A\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$

68.  $\{-3, 3\}$

69.  $\frac{3\sqrt{2}}{8}$

70. 0

71.  $(2, 0)$

72.  $[-1, 1]$

73. V

74. 2

75. 1

76.  $\frac{44}{3}$

77. -3

78.  $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$

79.  $m = \sqrt{3}$

80. 4

81. I ve II

82. I ve III

83. 20, 20

84.  $16000 \text{ cm}^3$

85.  $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$

86.  $\frac{4}{9}$

87.  $6\sqrt{2}$

88.  $\frac{32\sqrt{3}}{3}$

89.  $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{4}\right)$

90. 16

91. 220

92.  $16\sqrt{2}$

93. 15

94. 450

95. 2

### ÇİTA YAYINLARI



### Çöz Pekiştir

1.

$-\frac{14}{3}$

2.

7

3.

1

4.

$6a^2b - 12ab^2 + 4$

5.

5

6.

$\frac{3b}{2b-1}$

## CEVAP ANAHTARI

TEST 1	1	2	3	4	5	6	7	8
	C	C	A	B	B	D	B	A
	9	10	11					
	E	C	D					

TEST 6	1	2	3	4	5	6	7	8
	E	C	C	A	D	B	D	A
	9	10	11	12				
	E	B	B	C				

TEST 2	1	2	3	4	5	6	7	8
	C	C	A	E	B	A	D	A
	9	10	11	12				
	A	B	B	D				

TEST 7	1	2	3	4	5	6	7	8
	C	A	E	E	B	B	E	D
	9	10	11	12				
	D	A	A	C				

TEST 3	1	2	3	4	5	6	7	8
	E	B	E	B	D	D	D	D
	9	10	11	12				
	C	E	C	B				

TEST 8	1	2	3	4	5	6	7	8
	A	E	B	C	D	E	B	A
	9	10	11	12				
	C	D	B	A				

ÇİTA YAYINLARI

TEST 4	1	2	3	4	5	6	7	8
	D	B	C	D	A	D	C	B
	9	10	11	12				
	D	A	C	E				

TEST 9	1	2	3	4	5	6	7	8
	C	A	E	E	B	D	A	D
	9	10	11	12				
	A	B	A	D				

TEST 5	1	2	3	4	5	6	7	8
	C	A	B	D	B	E	A	C
	9	10	11	12				
	E	A	E	D				

TEST 10	1	2	3	4	5	6	7	8
	B	D	A	B	C	C	A	D
	9	10	11	12				
	C	B	A	A				

## CEVAP ANAHTARI

TEST 11	1	2	3	4	5	6	7	8
	B	A	E	A	C	D	C	B
	9	10	11	12				
	C	A	B	A				

TEST 16	1	2	3	4	5	6	7	8
	D	B	B	A	A	C	D	B
	9	10	11	12				
	C	D	D	E				

TEST 12	1	2	3	4	5	6	7	8
	A	D	E	E	C	C	B	D
	9	10	11	12				
	C	A	B	C				

TEST 17	1	2	3	4	5	6	7	8
	A	A	E	C	C	A	E	B
	9	10	11	12				
	E	C	B	A				

TEST 13	1	2	3	4	5	6	7	8
	D	B	B	D	D	D	B	E
	9	10	11	12				
	C	D	D	B				

TEST 18	1	2	3	4	5	6	7	8
	A	C	A	D	C	B	E	E
	9	10	11	12				
	C	A	D	E				

TEST 14	1	2	3	4	5	6	7	8
	E	A	A	D	B	C	D	E
	9	10	11	12				
	A	C	D	B				

TEST 19	1	2	3	4	5	6	7	8
	B	E	C	D	A	B	C	E
	9	10	11	12				
	C	D	C	D				

TEST 15	1	2	3	4	5	6	7	8
	E	A	B	C	C	D	D	B
	9	10	11	12				
	D	C	A	E				